生徒の数学観を変容させるための数学史の活用について

～「カバリエリの原理」の教材を通して～

筑波大学大学院修士課程　教育研究科
臼田　要介

（要約）

2003 年度から高等学校で導入される「数学基礎」において、平成１１年高等学校学習指導要領解説の中で「数学の諸概念の発展と人間とのかかわりやそれが用いられてきた背景などを理解させる」とあり、数学教育において、数学史の有用さが伺える。そこで本研究では、数学史を授業に取り入れることによって生徒の数学観の変容を探った。授業の教材として「カバリエリの原理」、「アルキメデスの求積」を扱った。その結果、数学史を教材として活用することによって、数学観の変容が見受けられた。また、数学に対する捉え方に変化が生じ、数学を学ぶ価値を見出すことができたといえる。

１．　はじめに

今日「数学離れ」、「数学嫌い」という言葉をよく耳にするが、子どもたちの数学の捉え方はどのようなものであろうか。IEA（国際教育到達度評価学会）[1]の調査から、子どもたちは数学学習は大切ではあるが、勉強は難しく、嫌いであるという結果が見て取れる。しかも、他国と比べるとわが国の数学の成績は優秀であるのにもかかわらず、嫌いという傾向にある。また、数学の学習に対して不安感も持っていることが分かる。この原因を、筆者は数学が、公式の暗記、日常生活には役に立たないもの、受験に必要なもの、学ばなければならないものというように否定的なイメージとして捉えられているからではないかと考える。それにはまず、子どもたちの数学に対するイメージというものを変えていく必要がある。つまり、子どもたちの数学観の変容が「数学離れ」、「数学嫌い」の減少につながるのではないかと考える。

1　国立教育研究所(1991).「数学教育の国際比較―第２回国際数学教育調査最終報告―」第一法規 pp145～198

数学は人間が発達してきた中で様々な活動、営みとかかわってきて、発達してきた学問である。そこで、教材に数学史を用いることで生徒の数学に対する見方・考え方、捉え方に変化が生じ、そのためには数学観の変容が求められ、歴史的背景や人間とのかかわりともに数学を学ぶ必要性を感じる。現在学んでいる数学は洗練され、完成されていて、断然と分かりやすいかもしれないが、数学の形成過程を学ぶこともまた数学教育において教育的価値があると考える。平成１１年学習指導要領解説[2]の「数学基礎」の中でも、「数学の諸概念の発展と人間とのかかわりやそれが用いられてきた背景などを理解させる」とあり、数学史の必要性が伺える。

沖田（1995）[3]は、子どもが数学に対する見方を変え、数学が変化し、発展するものであると捉えるよう、数学史を生かした指導を提案する研究を行っている。恩田（1998）[4]は、数学史教育における一次文献の利用とその意義について考察している。また、後藤（1995）[5]は、数学史を用いて解析幾何の曲線指導に曲線の作図を通した指導を加え、代数と幾何の統合を図る必要があると述べている。薬師寺（1996）[6]は、現在の解析幾何の指導に対し作図ツールを踏まえた曲線探求を行うことでどのような視点を得られるかを明らかにすることを目的として研究している。４人とも現在の数学学習において数学史の有用性を感じている。また、神長（1983）[7]は、数学史を生かす指導を指導する内容と人間とのかかわりについて意識を持つこと、数学史の考察に関して概念の形成過程を注意深くしていくことと定義している。数学史を扱うことは、数学教育においても、人間の営みや人間の考え方の根本を知るうえでも大いにかかわっていることが伺える。そして、礒田はその時代の歴史・文化的状況に立脚しての原典解釈、道具利用、追体験を強調している。

そこで今回は、歴史・文化的状況に立脚して原典解釈の立場に立って、原典を解釈しながら、数学の諸概念の発展、形成過程を追体験することによって生徒たちの数学観の変容を見ていくのが目的である。

---

2 文部省(1999).「高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編」　pp1〜39

3 沖田和美(1995).「学校数学における数学史を生かした指導に関する一考察」　平成７年度筑波大学大学院教育研究科修士論文

4 恩田洋一(1998).「一次文献を利用した数学史教育に関する一考察〜「数学基礎」に関連して〜」平成１０年度筑波大学大学院教育研究科修士論文

5 後藤司(1995).「曲線の表現史と作図ツールをふまえた解析幾何教材の刷新に関する一考察〜ギリシャから微積分創成期をふまえて〜」　平成８年度筑波大学大学院教育研究科修士論文

6 薬師寺将二(1996).「解析の歴史的変遷を踏まえた曲線に関する一考察〜作図ツールの使用を前提に〜」　平成９年度筑波大学大学院教育研究科修士論文

7 神長幾子(1983).「高等学校における微積分指導に関する一考察〜微積分学形成の歴史をふまえて〜」昭和５９年度筑波大学大学院教育研究科修士論文

２． 研究目的・方法

目的：授業に数学史を取り入れることによって、生徒の数学観の変容を探る。

目的を達成させるために以下の課題を設定し、下位課題とする。

課題１：教材に数学史を取り入れた結果、生徒が与えられた数学を単に受け入れるものではなく、自ら疑問を持つことによって、数学観の変容を探ることができるか。

課題２：数学史を用いることにより、数学に対する捉え方がどう変わるか。

課題3：数学史を用いることにより、数学を学ぶ価値を見出すことができるのか。

本研究で目的に対する研究方法として、授業の前後のアンケートと一日目の授業を終えた後の感想、授業の様子を撮影したビデオにより、生徒の数学観がどのように変化したかを調べる。

３． 授業概要

３．１ 教材の解説

原典として、『A source book in mathematics,1200－1800』[8]のカバリエリの原理、『アルキメデス方法』[9]の命題 2（ギリシア語と日本語）、またその英語訳『THE WORKS OF ARCHIMEDES INCLUDING THE METHOD, GREAT BOOKS OF THE WESTERN WORLD～１１.』[10]を取り入れた。カバリエリの原理では、その中に出てくる普段耳にしない不可分量の概念を学び、それについて疑いを持って取り掛かかり、不可分量の概念が現在の積分学の概念の始まりであることを追体験することを目的とした。そして、カバリエリの原理を用いて自ら球の体積を導き出すことを体験させた。また、『アルキメデス方法』では、カバリエリの時代以前にも求積（ここの授業では球の求積を扱った）が行われていたことを知り、アルキメデスの方法を体験することを目的とした。それと同時にギリシア文字も取り入れた。

カバリエリの原理では、授業資料として『A Source Book in Math』を元にして和訳したもの、カバリエリに関する参考文献を用いて、生徒が疑いを持ちながら活動できるように行った。また、アルキメデスの求積では、アルキメデスのやり方に沿いながら生徒が主体的な活動をできる

---

8 D. J. Struik(1969). ' A source book in mathematics,1200 - 1800 ' Cambrige, Mass, ：Harvard University Press pp210～214

9 佐藤徹(1990).「アルキメデス方法」東海大学出版会　pp18～25

10 Thomas L. Heath(1952).「THE WORKS OF ARCHIMEDES INCLUDING THE METHOD」「GREAT BOOKS OF THE WESTERN WORLD～１１. EUCLID, ARCHIMEDES, APOLLONIUS OF PERGA, NICOMACHUS～」WILLIAM　BENTON　pp572～574

ように行った。

３．２　授業環境

（１）日時：平成１２年１２月４日、７日の放課後の８名

（２）対象：筑波大学附属高等学校第２学年の希望者
（積分の基本的な内容は既習済み）

（３）準備：コンピュータ（Windows）、ビデオプロジェクター、Microsoft Power Point、事前アンケート、事後アンケート、ワークシート（授業後のアンケートを含む）、授業資料
カブリ（Cabri GeometryⅡ）

３．３　授業展開

指導目標：カバリエリの原理にあたる原典を読み、カバリエリの原理、不可分量について考察する。また、それらを基にして球の体積を求める。付け加えて、アルキメデスの『方法』を読み、アルキメデスの行った球の求積の方法を体験する。

（ｉ）<u>原典を読みながらカバリエリの原理、不可分量を知る。</u>【１時間目】

　不可分量について紹介し、それが基になってカバリエリの原理ができたという過程を学びながら、その原理について考察した。

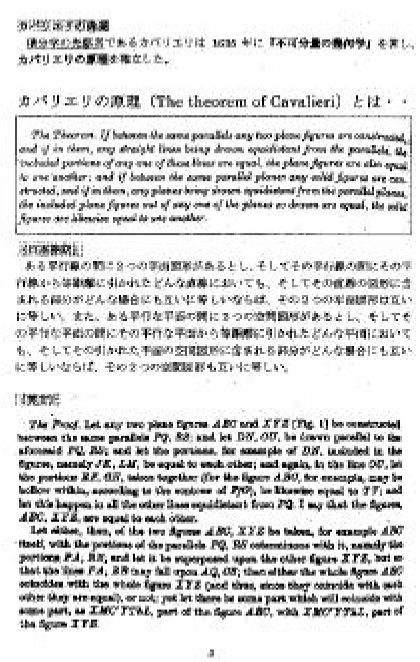

カバリエリの原理（The theorem of Cavalieri）とは・・

図１

【T：授業者、S：生徒】

〈T〉：「このテニスボールの体積わかるかな？」

〈S１〉：「水の入った容器にそのボールを入れて、増えた水の分がボールの体積だからテニスボールの体積を求められる。」

〈T〉：「うん、そうだね。それも１つの手段だね。では、数学の知識を使うとどうかな？」

—沈黙—

〈T〉：「半径を・・・」

〈S２〉：「あっ、半径をｒとすると$\frac{4}{3}pr^3$だ。」

〈T〉：「そうそう。球の体積は$\frac{4}{3}pr^3$だね。では、昔の人は球の体積をどのように求めたのか、求積の基を今から見ていこうね。」

と授業を展開していった。

「不可分量」についての説明。

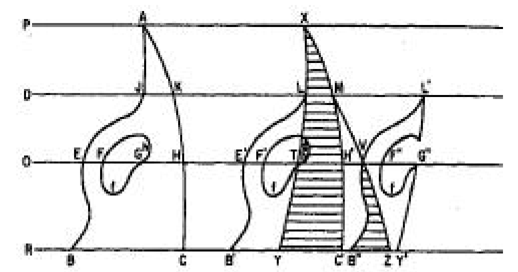
「線は大きさのない運動により、面は幅のない線の運動により、立体は厚さのない面の運動によって生じ、これらの要素はこれ以上分割できない窮極の成分で、これらの極微な要素の無限個の和によって、長さや面積や体積が求められる。」

（図２は生徒が上の文を読んで不可分量について説明している様子である。）

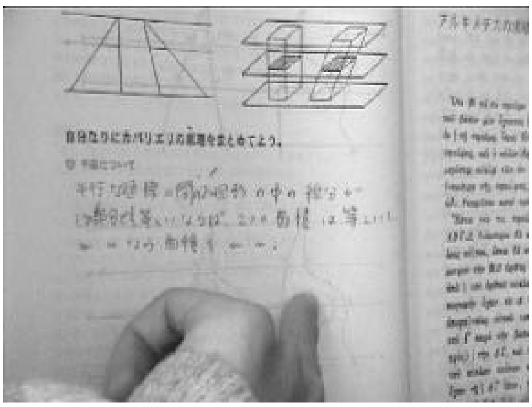
図２

まとめると

・線の indivisible(不可分量)は点である。
・面の indivisible(不可分量)は線である。
・立体の indivisible(不可分量)は面である。



カバリエリの原理の図



「カバリエリの原理」とは

「ある平行線の間に２つの平面図形があるとし、そしてその平行線の間にその平行線から等距離に引かれたどんな直線においても、そしてその直線の図形に含まれる部分がどんな場合にも互いに等しいならば、その２つの平面図形は互いに等しい。また、ある平行な平面の間に２つの空間図形があるとし、そしてその平行な平面の間にその平行な平面から等距離に引かれたどんな平面においても、そしてその引かれた平面の空間図形に含まれる部分がどんな場合にも等しいならば、その２つの空間図形も互いに等しい。」

（図１の原典より）

図形の不可分量を比較することが本質であるので、２つの図形のうち一方が既知である際に、効果的であることがわかる。

まとめると

◎平面について
平行な直線が２つの閉じた曲線と交わり、このことにより切り取られる２つの線分の長さが常に等しい（一定の比）の時、２つの閉曲線の面積は等しい（一定の比である）。（図３）
◎ 立体について
平行な平面が２つの閉じた立体と交わり、このことにより切り取られる２つの平面図形の面積が常に等しい（一定の比）の時、２つの閉じた立体の体積は等しい（一定の比である）。（図４）

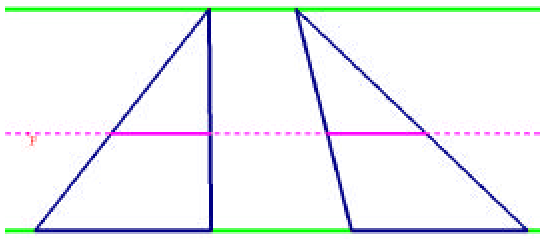


図３

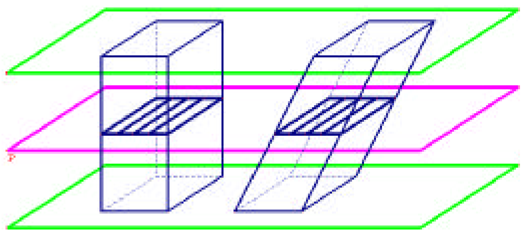


図４

まず、原典の日本語訳を読んでもらい、どのようなことが書いてあるのか理解してもらった。具体的には、ワークシートの穴埋めをしながら進めていった。

【T：授業者、S：生徒】
〈T〉:「カバリエリの原理の証明についてだけど、この証明の根拠は一体何なんだろうね？」
―沈黙、少し時間が経って―
〈S１〉:「不可分量。」
〈T〉:「うん。そうなんだよ。この証明の根拠になっているのは、不可分量の考えが基になっているんだね。」

不可分量の概念に疑いを持ってもらうために、再び不可分量について

不可分量の曖昧な表現を指摘している

【T：授業者、S：生徒】

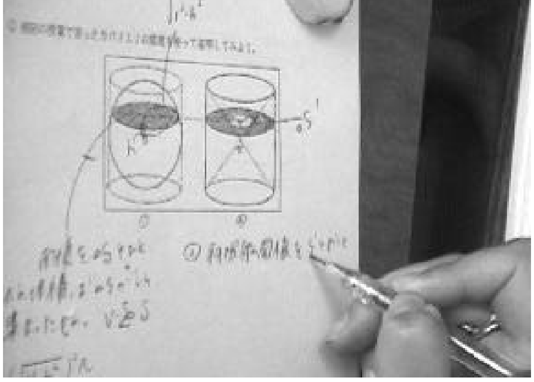
〈T〉:「ここでまた不可分量の概念に戻るんだけど、不可分量を説明している文章の中で何か変だとか、曖昧な表現だなって思うところないかな？」

〈S１〉:「幅のない線をいくら集めて面積が大きさとして存在はしないはずだし、厚さのない面をいくら集めても立体というのは存在しないというところ。」

〈T〉:「そうだね。いいところに気がついたね。今の説明わかったかな。まさに、カバリエリも実際そういう批判を受けていたんだね。」

〈T〉:「では、カバリエリはどうしたか。『平面図形は平行な糸で織られた織物、立体は薄い紙を積み重ねてできた書物のような物』とは言ったんだけど、糸とか薄い紙とかって言ってもさ、幅や厚さはどう考えたってあるよね。結局はカバリエリの表現って不完全なものだったんだね。でもね、この考えが基になって、前にやったカバリエリの原理につながっていくんだよね。不完全って言っても、この考え方はカバリエリの原理に生かせたんだね。」

（ii）<u>カバリエリの原理やカバリエリのアイディア（不可分量）を用いて、自分自身で球の体積（球の公式）を求めた。</u>【２時間目】

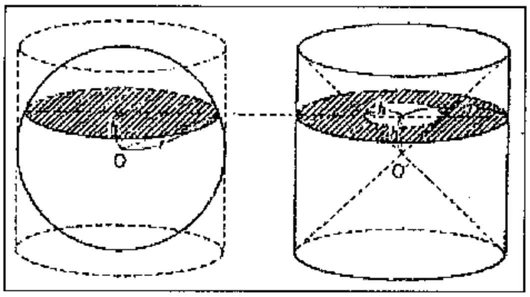


前の時間で学習したカバリエリの原理、カバリエリの考えを参考にしながら実際に生徒自身が球の体積を様々な方法で導いた。

この時間はすべて生徒たちが問題を解く時間にした。（具体的な問題は問１、問２である。）

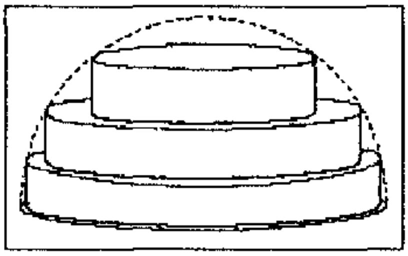
やはり、体積を求める問題になると、どうしても積分を使って求めようとする生徒が見受けられた。ここは積分を使わないで、そしてカバリエリの原理、カバリエリのアイディア（不可分量）を用いて求めると言うことを助言として与えた。

問題は以下のようなものである。



（問１）
前回の授業で習ったカバリエリの原理を使って証明してみよう。

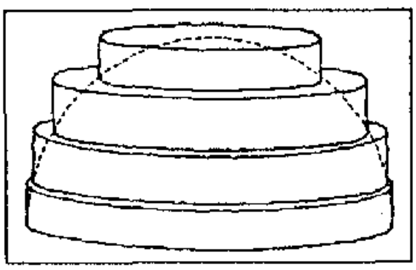
(i)

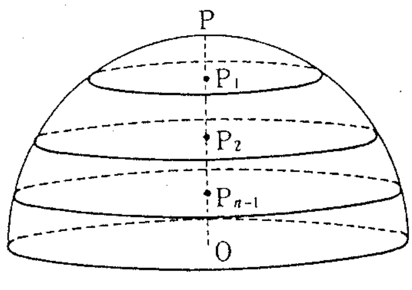


（問２）
前回の授業で習ったカバリエリのアイディアを使って説明してみよう。

（ヒント）下の図の半球を使って考えて、半径 OP をｎ等分する。

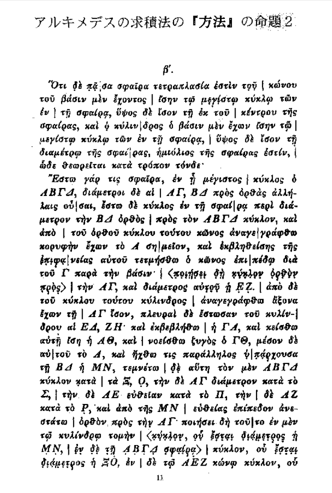
(ii)



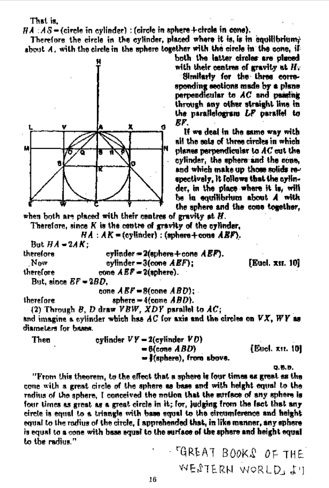


この考え方は、積分の分野の中で「区分求積法」にもつながってくる考えであり、１７世紀の求積法に多くの影響を与えたものである。

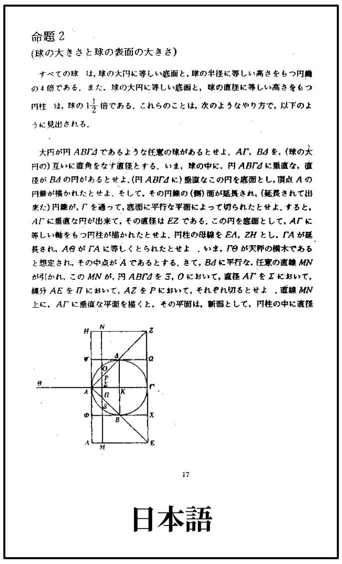
（iii）アルキメデスの球の求積法を紹介し、アルキメデスの考えに沿いながら実際に球の体積を求めた。【３時間目】



ギリシア語



英語



日本語

カバリエリよりも昔にも、球の体積が求められていたことを知るために、原典の日本語訳であるアルキメデスの『方法』を読み、実際にアルキメデスが行った方法を探りながら、球の体積を求めていった。それと同時に普段は文字というとアルファベットなので、普段慣れ親しんでいないギリシア文字を問題に取り入れた。

【T：授業者、S：生徒】

〈T〉：「アルキメデスの方法で球の体積を求めてみたんだけど、ここで質問ね。今、球の体積を求めたんだけど、じゃあ、球に外接する円柱を考え、その中に円錐が含まれているとすると、円柱：球：円錐の体積の比はいくつになるかな？」

〈S１〉：「えーと、6：4：1 かな！？」

〈T〉：「6：4：1 になった？ほかの答えの人いるかな？」

〈S1〉：「あっ、ちがう。」

―作業中―

〈S1〉：「3：2：1 だ。」

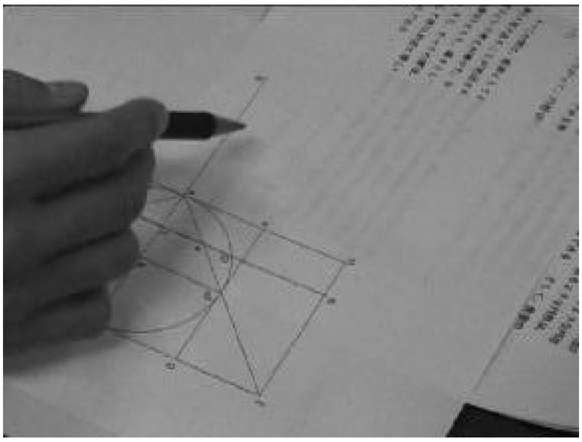
〈T〉：「そうだね。3：2：1 になるね。みんないい？ところで、この結果を見てどうかな。“ えっ ” って思わない？」

〈S2〉：「えっ！」

〈T〉：「それぞれの体積比が 3：2：1 になるなんてすごくない？」

〈S２〉：「・・・(首を上下に振るだけ)」

〈T〉：「この発見はアルキメデスのお気に入りの発見だったんだって。自分が死んだら、墓石にこの発見を刻んでおくように遺言を残したって言われているぐらいお気に入りの発見だったんだって。」



４．　考察・結果

課題１：教材に数学史を用いて、数学が与えられるものではなく生徒自身が自ら疑いを持つことで数学観の変容を探ることができるか。

授業後に感想を求めたところ、ほとんどの生徒が不可分量の考えに興味を示したくれた。特に、不可分量の悪い点、あいまいな点について次のような感想を述べていた。

例えば、「線は面積を持たないはずなのに持っていると仮定している。」「面積を持たない線分が集まると、どうして面積の存在する面になるのか。」と不可分量の考えを鵜呑みするのではなく、それぞれが疑いを持って問題に取り掛かっていることが伺える。このことにより、数学は単に与えられるものではなく、自ら疑いを持って取り掛かっている意識が伺える。このことを受けて、「数学は定理などを理屈抜きでとりあえずこういうものだと分り切って覚えるのが、数学ができなくならないための最も簡単な方法として身につけていたので、一度疑い出すとこうも説明に時間が掛かるのかと思ったので、これからは何にも疑いをかけて考えを深めていこうと思う。」と感想を述べている生徒もいた。これは今までの与えられたものを鵜呑みにするのではなく、何にでも疑い持つというように数学に対する数学観が、数学史を用いることで変容していることが見て取れる。

また、「カバリエリの不可分量の定義に対して疑いを持ってみたことで、一見しっかりしていてそうで、でも実は厳密ではなかったのも疑いを持つことの大切さというものを思った」と感想を述べていて、同様な数学観の変容が伺え、数学に対する興味、関心がさらに高まっていることがわかる。

また、ある生徒の感想は「公式を覚えるのではなく、その公式はどういう意味かを考えるものなんだなと思った」と数学の公式は暗記ではないということを再認識、再確認している。そして、「小学生に球の公式の$\frac{4}{3}pr^3$を鵜呑みにさせるのはいけないと思った。実は大公式なのに」と述べており、数学は単に与えられて問題を解くといった受身的な捉え方から、自ら発見したり考え出したりする自発的な捉え方へと数学観が変容していることが伺える。

課題２：<u>数学史を用いることで、数学に対する捉え方がどう変わるか。</u>

ある生徒のアンケート結果である。

アンケート項目 ・大部分の数学は仕事の上で実際に使われています （事前）反対→（事後）賛成 ・数学は日常生活に必要ありません （事前）賛成→（事後）反対

上の事前アンケートの結果を見ると、この生徒は、数学は日常生活には必要のないものとして捉え、実用性がないもの、今しか必要がないもの、つまり受験があるから仕方なく数学を勉強しているというふうに考えられる。また、数学は学校でしか扱わないもので、将来にはあまり役に立たないものだと捉えている傾向にある。

しかし、事後アンケートの結果を見ると「大部分の数学は仕事の上で実際に使われています。」は「賛成」に、「数学は日常生活に必要ありません。」は「反対」に変化していた。教材に数学史を取り入れることにより、事前アンケートの時と数学に対する考え方、捉え方が変わっているのが伺える。これは、授業で数学史を用いて求積の形成過程を知ることによって、数学が日常生活と密接にかかわっていると捉えるようになったと言える。

課題３：<u>数学史を用いることにより、数学を学ぶ価値を見出すことができるのか。</u>

カバリエリの原理において、「点→線→面→立体とその関係により、体積、面積を考えることができる」「図形は線や点の集まりである→視野が広がる」「連続的に線や面が動けば面や立体ができるという点」というふうに、不可分量の良さを挙げていてカバリエリの考えについて価値あるものとして捉えていることが伺える。また、この考えを受けて「積分の大元になっている」「今の積分のように和がどうこうではなく、１つ１つの線分がどうこうということから積分が始まったということを知った」と求積の形成概念の１つであることを認識することができ、当時の数学を価値あるものとして感じている。

球の体積を求めるとき、ほとんどの生徒は積分を使って解いてしまっていた。これは体積を求めるのは積分を使わなくてはいけないという固定観念がある。現在の積分は計算ができれば、積分は分かったものとして捉えられがちであるが、当時の数学から積分の概念、意義をしっかりと捉えて数学を価値あるものとして捉える必要があると考えられる。

また、「昔の人（ここではカバリエリを言う）は偉大だ」「昔の人たち

の沢山の積み重ねがあったからこそ、現在行われている難しい数学も簡単に（昔に比べたら）できるようになった」と当時の数学に歴史的意義、また教育的価値を見出せたと言える。

授業終了後、この授業を通して変わったと思うところや質問・感想等の自由な記述を求めたところ、以下のようなコメントが得られた。

課題１～３に感想は載せてしまったが、感想の中には、ギリシア文字に対しての興味や反応が見受けられた。文字の持つ影響力、凄さを実感していた生徒もいた。また、「今使っている文字でやったら、もっと分かりやすかったのに。」とギリシア文字の難しさを感想として述べる生徒もいた。

【アンケート結果】（生徒のそのままの記述である）

・ギリシア文字で書かれた図形は慣れていなくて読みにくかった。アルファベットの文字のスゴさっていうのを感じました。不可分量の定義に対して疑いを持ってみたことで、一見しっかりしていてそうでも、実は厳密ではなかったのも疑いを持つことの大切さっていうのを思った。
・学校の積分とは違う。公式を覚えるのではなく、その公式はどういう意味かを考えるものなんだと思った。ギリシア文字を読むのはすごく面倒だった。
・数学は定理などを理屈抜きでとりあえずこういうものだとわかりきって覚えるのが、数学ができなくならないための最も簡単な方法として身につけていたので一度疑いだすとこうも説明に時間がかかるのかと思ったので、これからは何にでも疑いをかけて考えを深めていこうと思う。

５．　おわりに

本研究では教材に数学史を活用することによって、生徒の数学観の変容に焦点を当ててきた。そこで今回は「カバリエリの原理」、「不可分量」、「アルキメデスの求積」についての題材を扱ってきた。その題材に原典を用いて、歴史・文化的状況に立脚して原典解釈の立場に立って原典を解釈していくことで、当時の数学を価値があるものとして捉えられるようになっていることがわかった。また、設定した下位課題を見てもわかるように、教材に数学史を取り入れることによって生徒の数学観の変容が見受けられた。つまり、生徒の数学に対する見方・考え方、捉え方に変化が生じたという点で、今回の実践例は大きな役割を果たしたと言えるのではないだろうか。また、与えられた数学を単に鵜呑みにするのではなく自ら疑いを持って取り組むようになり、自発的な捉え方へと変容していることが見られた。

また、教材に数学史を取り入れることによって、数学観の変容が見られたので、「数学嫌い」、「数学離れ」を減少させる手段につながると考えられる。学習指導要領の中にある「数学基礎」の目的に準じるような意

識、意欲を持たせるには数学史を用いた学習が最も効果的であると言えよう。しかし、ただ単に教材に数学史を用いるのではなく、教師側もしっかりとした準備、教材研究が求められる。今後は、多くの実践例を通して生徒の数学観の変容を探り、数学を興味のあるものとして捉えられるよう更なる努力が求められる。数学は生徒にとって必要なものというよりは、学ばなくてはならないものという考えを少しは軽減できるのではないだろか。

謝辞）

研究授業に際して、国立筑波大学附属高等学校の飯島忠先生、大野昭次先生、川崎宣昭先生、利根川誠先生、中田庸男先生、矢野一幸先生を始め、数学科の先生方には貴重な御意見、御指導をいただきました。深く御礼申し上げます。

註１）

本研究は、科学研究費、基礎研究 B（２）展開研究（課題番号 10558032、研究代表者礒田正美）の一貫として行われた。

註２）

授業の詳細、並びに資料等は次に掲示している。

http://130.158.186.11/mathedu/for All/project/2000/index

【参考文献】

【１】D. J. Struik(1969).‘A source book in mathematics,1200－1800’Cambrige, Mass,：Harvard　University Press　pp210～214

【２】佐藤徹訳(1990).「アルキメデス方法」東海大学出版会　pp18～25

【３】Thomas L. Heath(1952).‘THE WORKS OF ARCHIMEDES INCLUDING THE METHOD’、Wallace Brockway　‘GREAT BOOKS OF THE WESTERN WORLD ～１１. EUCLID, ARCHIMEDES, APOLLONIUS OF PERGA, NICOMACHUS ～’WILLIAM　BENTON　pp572～574

【４】ボイヤー(1984).「数学の歴史３」朝倉書店　pp89～93

【５】近藤洋逸(1994).「近藤洋逸数学史著作集　第５巻　数学史論」日本評論社　pp278～284

【６】武隈良一(1959).「新数学シリーズ 15　数学史」培風館　pp96～97

【７】片野善一郎(1995).「数学史の利用」共立出版　pp139～143

【８】グレイゼル(1997).「グレイゼルの数学史Ⅲ」　大竹出版　　pp35～37、pp122～125、pp191～192、pp208～210

【９】神長幾子(1985).「高等学校における微積分指に関する一考察～微積分学形成の歴史をふまえて～」　昭和５９年度筑波大学大学院教育研究科修士論文

【10】沖田和美(1996).「学校数学における数学史を生かした指導に関する一考察」 平成７年度筑波大学大学院教育研究科修士論文
【11】後藤司(1997).「曲線の表現史と作図ツールをふまえた解析幾何教材の刷新に関する一考察～ギリシャから微積分創成期をふまえて～」 平成８年度筑波大学大学院教育研究科修士論文
【12】薬師寺将二(1998).「解析の歴史的変遷を踏まえた曲線に関する一考察～作図ツールの使用を前提に～」 平成９年度筑波大学大学院教育研究科修士論文
【13】恩田洋一(1999).「一次文献を利用した数学史教育に関する一考察～「数学基礎」に関連して～」 平成１０年度筑波大学大学院教育研究科修士論文
【14】国立研究所(1991).「数学教育の国際比較－第２回国際数学教育調査最終報告－」 第一法規 pp145～198
【15】文部省(1999).「高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編」pp1～39