文化としての数学学習に関する一考察

～方程式の解の公式の歴史解釈を通して～

筑波大学大学院修士課程教育研究科
熊田真一

要約
2003年から施行される教育基礎を先取りして数学学習における数学史利用の実践例を提示し、生徒が数学観を再構築し、「数学を文化」であると捉えるような授業の可能性を考察する。今回は方程式の解の公式を教材とし、「数学を文化として捉える事」の下位課題として「数学が身近なこと」、「数学の多様性」、「数学の創造性」を体感する事を設定し、授業を行い、数学学習における数学史利用の有効性を述べる

1．はじめに

２００３年から施行される指導要領において数学基礎が選択必修になった。その数学基礎における目標の一つである。「数学と人間との関わり」に関して数学における概念の形成や原理・法則の認識の過程と人間や文化との関わりを中心として，数学史的な話題を取り上げることが例示されている．今回の研究では、その数学史を先取りし、数学史の原典を解釈することにより、数学が人間の営みを通して構成されたものであることを体感し、生徒の数学観を改めるような価値のある実践的な学習指導法と指導内容の可能性を検討する。

2．意図と目的

（1）意図

今回の研究授業の事前アンケートにおいて「ほとんどの人は仕事の上で数学を使いません」という質問に対して 44 人の生徒の約 6 割近い生徒（26 人）が賛成および大賛成といっている。それにたいして反対、大反対と答えた生徒は 2 割程度（9 人）でしかなかった。同様に「数学を使わなくても日常生活を十分やっていけます」という質問に対しても 6 割を越える生徒（27 人）が賛成、大賛成といっている

のに対して反対、大反対と答えた生徒は２割にも満たなかった（6人)。この結果からわかるように、生徒にとって数学とは身の回りにあるものではないと捉えられているのである。このことは日本の中高生に関しても、ほぼ、同様のことが言える。これが数学離れの原因の一つであると考えられる。しかし、「数学は決して計算や証明などだけをこととする、限られた性格の学問ではない。これはもっと多面的で創造的で、科学技術とのつながりはもとより、哲学や思想や芸術などとも深い交渉を持ち、人類の文化史に深く根を下ろした極めて壮大な学問である」はずである。つまり数学とは文化そのものであり、文化とは人の営みであり、人々のみのまわりに根づいたものである。そういう認識が生徒に芽生えることにより数学に対する意欲を向上させることが出来ると考える。

（２）目的以上の意図は数学基礎の目標と一致する。ゆえに、本研究の目的は数学学習に数学史を利用し、子ども数学史に直接触れることにより、数学に対するみかたを変え、数学が文化であると捉えられるようにする。その為に生徒に数学が身近で、多様な形、表現、をもち、人々の営みによって創造されたものであることを体感させる。ゆえに本研究では下位課題として、「数学が身近であること」、「数学の多様性」と「数学の創造性」を体感するような授業を行い、数学学習における数学史利用の可能性を考察することである。

（３）下位課題

（ａ）数学が身近であることを体感する

数学は数字と文字などの抽象的なモノのだけを扱う学問ではなく、目に見え、手に触れる事のできる具体的なモノも扱う学問であることを知り、生徒がより数学を理解しやすくし、数学がより身近な学問であることを体感する

（ｂ）数学の多様性を体感する

数学の（数字と文字によるものと正方形や立方体などの図による）表現の多様性と問題に対する解法の多様性を体感する

（ｃ）数学の創造性を体感する

過去の数学の成り立ちに触れることにより数学が人の手によって作られたことを知り、証明などの創造を追体験する

３．研究方法

上記の研究目的を達成するために以下の題材を用いて、研究授業を行い生徒の活動や意見から考察する

（１）授業目標

数学史を教材とし数学を文化として捉える、その下位課題として生徒が「数学が身近なこと」、「数学の多様性」、「数学の創造性」を体感する。

（２） 授業の教材

方程式の解の公式の解釈

「ジャブルとムカーバラ」（アル＝フワーリズミー）から二次方程式の解の公式に対する解釈、および「アルスマグナ」(カルダノ)から三次方程式に対するカルダノの公式。

（３）教材を選んだ理由

近年の数学教育における解法の中心は代数的解法である。視覚的アプローチをしていた時代の数学に触れる事により数学が目に見える学問である事をまなび，立方体のモデルなどに触れることで、数学がより身近な学問である事を知るのに最適であると考えた。また，現在の代数的な解法とも比較し数学が多様的（解法，表現）であり，また二次，三次方程式の解の公式の成り立ちを知ることによりその創造性を追体験する事ができると考え，今回この２つの原典を取り上げた。(図A）

（４）指導計画

（ａ）生徒の数学観を確認するため、事前アンケートを実施

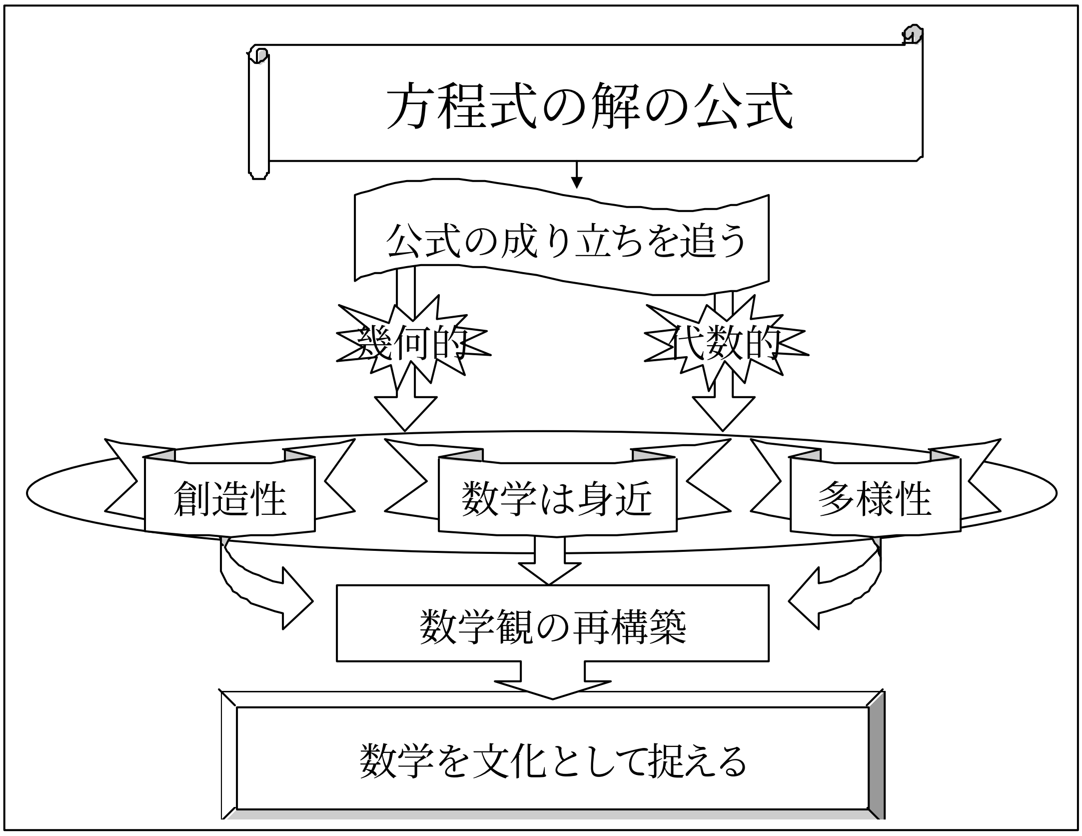
（ｂ）授業を行う（３時間）

（ｃ）生徒の数学観の変容をみるため、事後アンケートを実施

（ｄ）指導目標

過去の公式のとらえ方、公式の成り立ちをまなび、現在の公式のとらえ方と比較する事により、数学を文化として捉える。

（注）授業の対象生徒
茗渓学園 第三学年Ｂ組（数学Ⅰ履修中）



図Ａ

（５）授業の進め方

（ａ）一次文献を利用し、授業を行う

（ｂ）立方体等のモデルを用いて生徒に活動の中から数学史を体感させる

（ｃ）グループ学習を取り入れる（それに伴いチームティーチングを行う）

４．授業実施過程

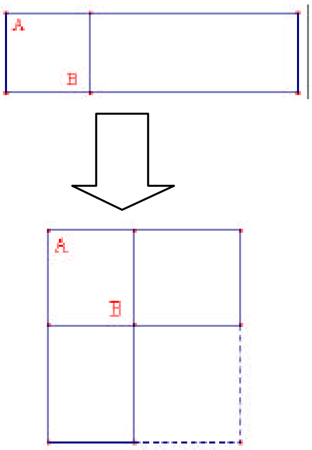
《１時間目の授業》

【目標】

「ジャブルとムカーバラ」の二次方程式の解の公式に対する解釈を理解し、現在の解釈と比較する。

【授業概要】

図Ｂ



（１）$X^{2}+10X=39$を解く

（２）二次方程式の解の公式を式変形から導く

（３）「ジャブルとムカーバラ」に習って図形（図Ｂ）的（紙とはさみを用いて）に二次方程式の解の公式を平方完成により導く（写真１，２）

（宿題）現在の二次方程式の解の公式と過去の解の公式の導き方を対比しその考察

【生徒の反応】

二次方程式の解を求めることは簡単にできるようだし、解の公式も容易に使えるようだ。しかし、解の公式を式変形から求める方法を忘れていた生徒もいるようだ。

＊）生徒とのやりとり

（以下＜S＞：生徒　＜T＞：教師）

$X^{2}+10X=39$を解の公式によって解いた後

＜T＞解の公式は覚えてるよね。じゃ、これはどうやってだした？覚えてる？

＜S＞覚えてます

＜T＞前に出てやってみて　$aX^{2}+bX+c=0$からどうやってだした？

＜S＞やっぱり、わかりません

紙とハサミによって解の公式を求める事は生徒にとって分かりやすかったようだ。生徒に発表させたところ、きちんと理解しているようだった（写真３）。

写真１　図を切り取っているところ

写真２　切り取った図形を並び替えて平方完成している

写真３　生徒が前に出て説明し

《２時間目の授業》

【目標】

アルスマグナより三次方程式のカルダノによる解法（以下カルダノの公式）を提示し、その証明を立方体のモデル（発泡スチロール）を使って生徒に解釈してもらう

【授業概要】

写真４ グループで考えている

（１） Ｘ^{3}＋６Ｘ＝２０を解く（未学習）←解けない三次方程式のカルダノの公式（アルスマグナ）を提示その公式を立方体のモデルを使いグループになって証明を理解する（写真４，５、６）

【生徒の反応】

立方体のモデル
を用いて
も文献を読み進
めるのが
難しいようだっ
た。
現在との
表記の違いに戸
惑う生徒
が多かった。
＊＊）生徒
とのやりとり

写真５　立方体のモデルを使って考えている

＜S＞立体DAとDEって同じじゃないんですか？
＜T＞原典の図を見るとそう見えるよね。でも、立体DAの体積と立体DEの体積って、原典では何だって言ってる？

生徒：原典を読んで

写真６ モデルを使って考えている

＜S＞あー、立体DEってこれのことといってるのか。
（立体のモデルを手にとって）
でも、なんで、これなんだろう？DとＥってこれのことじゃないの？（モデルの頂点を指差して）

立方体のモデルを使い予想しながら理解している生徒も観られた。

《３時間目の授業》

写真７　モデルを
使って説明している

【目標】

カルダノの公式の証明を理解し、実際に３次方程式をカルダノの公式を使って解く。

【授業概要】

（１）　２時間目の復習（写真７,）実際にカルダノの公式を使ってX^3＋６Ｘ＝２０を解く（写真８）授業を通しての感想

【生徒の反応】

現在との表記の違いによって混乱していた生徒もスライドと立方体のモデルを使い証明を説明したところ大部分の生徒は理解できたようだった。未学習の内容だったためか、理解するのは困難であったようだが、三次方程式が解けた時には感動する生徒もいた。

写真８　実際にX^3＋６Ｘ
＝２０を解いている

５．考察

今回の研究の課題は数学を文化として捉えることとし、その下位課題として「数学が身近なものであること」「数学の創造性」、「数学の多様性」を体感するという事であった。今回、２次、3次方程式の解の公式を扱うことにより研究目的を達成できたかどうかをアンケートの結果と授業後の感想をもとに考察する。

（以下『』は生徒の感想の原文）

『アラビア人の方法は目に見える方法だったから、結構親しみを感じられた』『図や道具（紙とハサミ、発砲スチロールの立方体）などをつかって、実際にやってみたりして、とても理解しやすかった。』『授業で学んだ公式はなかなか形が見えなくて、実感が持てなかったけど、アラビアのやり方でやると、目で見えるので分かりやすい。』このような生徒の感想から、紙とハサミ、発泡スチロールの立方体を使った説明が分かりやすく、数学を理解することの手助けになったことが言える。また、『2次方程式などの公式の意味や証明なんて、今まで何も気にならならず、丸呑みしていただけだったが、アラビア人の解き方を知って数学が少

し近くなったと思った。』という意見もあり、生徒が実際に「数学が身近であること」を体感したといえるのではないだろうか。

『数学にはいままで一通りか二通りのやり方しかないと思っていたのに、こんなやり方もあるのかと知った。』『普段ただ計算しているだけの公式もこういう、いろいろな解法の仕方があるという事を知ることができてよかった。』『今までの方程式を解くのは全て計算力にかかっていたのが、昔のような視覚的な解き方もあることを知り衝撃を受けた』『やり方は一つだけじゃないんだと改めて思った。数学は型にはまっている科目ではないような気がした』最近の代数偏重の数学に対し図形による解法という物が新鮮だった為か、多くの生徒がこれと同じように「数学の多様性」について感想を述べている。また、『今・・・テストのためにしかたがないからやっていた。つまんない。意味が無い。アラビア人は、目に見えるように表して考えていたことを知った。今、自分達がやっているのは、公式に当てはめるだけだけど、図形にしてみると“$X^2+10X=39$”の姿がみえた。アラビア人の考え方を知れてたのしかった。一つのことにもいろいろな考え方があった。』『数学には昔のやり方と今のやり方などたくさんあったり、図形から考えたりしたので、今までの公式を覚えたりするものという考えがちょっと変わり、面白く考え深い物だと思った。』これらの感想もやはり、数学の多様性についても述べているが、注目すべき点は、いままで、「公は暗記するもの」という考えから「公式の成り立ちにも色々な考えがある」というようになった点である。「数学の多様性」を知ることにより生徒の数学観が再構築されたといえる。

『今まで数学は公式さえ覚えて数字を当てはめていけば答えが出ると思っていた。でも、その公式も古くから人々が考えてきた奥の深い物だと知った。』『数学のあの公式ができるまでにもいろいろな考え方があり、導かれた方法があり・・・そして、たくさんの解き方があるんだなぁと改めて実感しました。一つの解き方だけでなく。たくさんの解き方がある。公式を単に覚えるだけでなく、その公式の導き方にも注目したいと思う。』『アラビア人は頭の中で考えて理解しやすい解の公式を作ることができてすごいと思った。今は公式をただ暗記しているだけだったので、アラビア人の解法の素晴らしさを知った。考え方の面白さを知ることができてよかった。』これらの意見は数学の創造性についての

感想と見ることができる。これらにもまた、「公式の暗記はするもの」から「公式の成り立ちにも注目したい」というように生徒の数学観が再構築されたといえる意見と見ることができる。

このほか、『初めて公式のできる過程に興味を持った。新しいことに挑戦することがどれだけ大変かわかった。』『公式が大昔の人が解いたのを知り、数学の公式はちゃんと解き方があったのをしって、数学をもうちょっと頑張って勉強しようと思いました。』『少々、侮っていたが、昔の人は頭がいいと思い知らされた。今日における数学の基礎は彼らの偉業の上に成り立っているとおもうようになった。』という感想もあった。上記の感想は数学に対する興味、関心が高まった、という意見であり。今回の授業は生徒の数学に対する興味、関心を高めることのできる可能性があると判断できる。そして、その理由として、生徒は、視覚的なアプローチ（二次方程式の場合は長方形、三次の場合は立方体）によるものと、アラビア人（アル＝フワーリズミー）、カルダノという過去の人物によって解かれたという事実からであると答えている。

以上から今回の研究授業から「数学が身近であること」、「数学の創造性」と「数学の多様性」を生徒が体感することができたのではないだろうか。また、生徒の興味関心を高めることもでき、数学学習において数学史を利用し、数学を視覚的に捉えることは非常に有効であると言える。

６．終わりに

本研究は２００３年から施行される指導要領において選択必修になった数学基礎を先取りした研究であり、数学基礎における数学史利用の可能性についての研究であった。今回の研究授業は、数学を視覚的にアプローチしていた時代の数学史を利用し、生徒が数学を文化として捉えることを目標とし、「数学が身近であること」、「数学の創造性」、「数学の多様性」を体感することをその下位課題とした。時間の関係で歴史的な背景などに詳しく触れる時間は少なかったが、上記の生徒の感想から分かるように生徒は自ら、数学観の再構成をし、下位課題に関しては非常によい反応が得られた。また、実際に文化としてとらえていると見られる感想もあり非常に意味のある授業ができたと考えている。今回の研究授業は数学基礎における目標は達成できたのではないだろうか。その意味で数学学習における数学史の利用は非常に有効であり効果的であ

ることがわかる。数学を文化として捉えるという新しい視点からの数学学習は、今後の数学教育において非常に大きな役割を担うと予想する。今後さらに多くの実践例を通して数学史の教材化を進める必要があるだろう。

謝辞

研究授業に際して私立茗渓学園の島一史先生、鈴木誠先生、永田眞裕先生、黒澤陽子先生を始め、数学科の先生方に御指導いただきました。深くお礼申しあげます。

註１）

本研究は、科学研究費、基盤研究Ｂ(2)展開研究(課題番号 10558032、研究代表者礒田正美）の一貫として行われた。

註２）

授業の詳細並びに資料等は次に掲示している。
http://130.158.186.11/mathedu/forAll/project/2000/index

参考文献

・ 伊東俊太郎（１９８７） 数学の歴史 現代数学はどのようにつくられたか 中世の数学　共立出版 ｐ３２２～３７５

・D.J. Struik　（１９６９）A source book in mathematics, 1200-1800 Cambridge, Mass. : Harvard University Press　ｐ６２～ｐ７０

・村田全　茂木勇（１９７６）数学の思想　ＮＨＫブックス.　ｐ１１

・文部省（１９９９）高等学学習指導要領解説　数学　理数編

・国立教育研究所（１９９１）数学教育の国際比較 －第２回国際数学教育調査最終報告－第一法規 ｐ１７７

・恩田洋一（１９９８）　一次文献を利用した数学史教育に関する一考察～「数学基礎」に関連して～　平成 10 年度筑波大学大学院教育研究科修士論文

・沖田和美（１９９５）　学校数学における数学史を生かした指導に関する一考察　平成７年度筑波大学大学院教育研究科修士論文

・ 礒田正美（１９８７）　数学学習における数学史の利用に関する一考察 1987 年 3 月 筑波大学附属駒場中・高等学校研究報告　第 26 集

・ スチュアート・ホリングデール（２０００）数学を築いた天才たち」（上）講談社 ｐ１７７～ｐ１８９