# 数学者の新方法の公示による生徒の数学観の変容に関する一考察

～フェルマーの論文 極大および極小値研究のための方法」の解釈を通して～

［章構成］



筑波大学大学院修士課程教育研究科
青木　弘

要約

本研究では、一次文献である原典を読みながら追体験することで、微分の草創期にみられる問題とそれに対する創始者フェルマーのダイナミックな考えを教材として取り扱う。その結果，数学が絶えず連続して変化し、発展するものであると捉え、また新しい方法論によって、数学の問題が提起され切り拓かれると認知することから、生徒の数学観の変容を伺う。

## 1．はじめに…

今日の数学は、人間の様々な活動とかかわり合って創られてきたものであることや数学を文化との関連からとらえることを全く忘れてしまっているかのように思える。完成した数学のほうが、立派な価値をもっていて、整然としていて分かりやすいかもしれないが、創り出される過程のほうが数学に対する興味・関心をより高め、より身近なものとして認識できるため、教育的価値があると思う。

今日、数学史や数学史的な話題は、教師が指導する立場にとって、授業の導入や授業内容に関するトピックス、数学者のエピソード等を取り扱う程度のものであり、また教科書をみても各章のはじめや巻末に各章の内容に関係のある数学者のエピソードや業績が簡単に扱われている程度のものである。数学そのものを主体におくのではなく、それぞれの時代に様々な社会に生きていた人たちである、数学を用いた人･研究した人･学んだ人の側に立ってみると、数学は時代とともに、それぞれの社会の中にあって、受け継がれ、特に他の地域との交流の機会があった場合には飛躍的に発達してきた。数学と社会は何かのかかわりをもち、数学が社会にとって何であるか考えるきっかけとなるのではないだろうか。

ﾌｨｰﾙｽﾞ賞を受賞した、日本を代表する偉大な数学者である故小平邦彦氏(2000)は、『怠け数学者の記』の中で、次のように述べている。

私は数学の教育は、数学の歴史的発展の順序に従って、行うべきであると思う。…（中略）…歴史的に遅く現われた分野を子どもに教えようとすれば、その分野の本質的な部分は子どもに理解できないので、結局非本質的なつまらない部分を教えることになる。そして、つまらないことに多大の時間を費やして大事なことを教える時間が減り、数学教育が全体として非能率的になる。

また、竹之内脩氏(1999)は、『数学の教育内容をどう考えるか』の中で、次のようなことを言っている。

17 世紀以降発展した科学技術は、微積分あってのことである。そして数学も、17 世紀以降大発展したのである。その中心となったものは微積分である。…（中略）…微積分のからむ問題には長い歴史がある。そこに人智の発展があり、それを歴史的教材として扱うというのであれば、これには大きな意義を認める。…（中略）…17 世紀以降の数学が、なぜ大きな発展をとげることができたか。そういうことへの理解の道を与えていただくことが大切なことだろう。（下線筆者）

こういう観点から、数学独自の論理をもって発展する過程を、やや遠回りになるかもしれないが、微分の草創期にみられる問題とそれに対する創始者フェルマーのダイナミックな考えを教材として取り扱っていきたい。さらに、今回の高校数学の指導要領改訂(1999)には、コンピュータについて以下のように述べられているため、ぜひとも授業の中で、積極的にコンピュータを導入して、活用していくような働きかけを行いたいと考える。

情報通信社会の進展する現代では多くの問題が数学的に整理され、コンピュータの活用によって解決されており、数学の果たしている役割は極めて大きい。そのため、数学教育でコンピュータなどを積極的に活用することも重要である。

## 2．研究目的と方法

本研究では、以下を研究目的とする。

数学史文献を題材とする活動を通して、一次文献である原典から読み取られるような、かつて昔あった 数学』というものはこうだったと生徒自身がそれぞれ解釈し学習することから、それぞれ自分なりに理解し、また 数学』というものが人間の営みを通して構成されてきたものとして感得し、追体験できるか否かを明らかにする。さらにコンピュータ等の活用を含めて、近未来型の指導法の効果を明らかにする。

上記の目的を達成するため、以下を下位課題として設定する。

- 一次文献である原典を読みながら追体験することで、連続性・発展性を感じ取り、数学では絶えず新発見が行われていることを認知する。
- 新しい方法論によって、古い問題の鮮やかな解決が得られたことではなく、新しい数学の問題が提起され、新しい数学の分野が切り拓かれる、つまり、「新しい、まだ浸透していない考え方をどうやって相手に理解

させるか。」という問いに、どう対応するかを念頭において考える。

- 子どもが数学に対する見方を変え、数学が変化し、発展するものであると捉えられるよう、数学史を生かした指導を提案することである。
- 作図ツールを用いることで、幾何学的には放物線がどう書けるかを体験することで、視覚的に理解できる。また、求めた答えを吟味するために、作図ツールを用いることで、視覚的に確認できる。

なお上記の研究目的や下位課題に対する研究方法として、授業前後の事前アンケート・事後アンケート、ワークシートを兼ねた授業資料、および授業の様子を撮影したビデオにより、生徒の数学観に対する変容を調べる。

## ３．授業教材の解説

本研究では、フェルマー(P. de Fermat, 1601-1665)が 1629 年に書いたものとされている最も初期の極大極小論の論文『極大及び極小値研究のための方法＊[1]』(1629) を考察の材料としてあげていきたい。

数学の歴史においてもっとも創意工夫に富んだ世紀といえるのは、17 世紀と考える。その 17 世紀から 18 世紀末にかけての間でつくられたのが、微分学である。微分学の中で欠くことはできないのは、曲線の接線であろう。しかし 17 世紀までの間ずっと、接線に関する問題は、系統的には研究されず統一した方法もとられていなかったのである。なぜなら、ユークリッド(Euclid,B.C.300 頃)は『原論』の中[第３巻第 17 命題以降] で、円の接線＊[2]について、アルキメデス(Archimedes, B.C.287-212)は『方法』の中で、螺旋への接線について、またアポロニウス(Apollonius,B.C.262-200)は『円錐曲線論』の中で、楕円・双曲線・放物線への接線について詳しく展開されているが、平面上の一般的な曲線を考えて、その曲線上にあるどんな点でも、そこを接点とするような接線の作図方法は確立されてはいなかった。いわば幾何学的な曲線であり、静的である。

そこで、フェルマーは独自の極値の求め方を研究し、「仮に極値が求まったと仮定する（今日で言えば極限を代入して求める方法に通じる)」議論を展開する。ここで興味深いことは、曲線の極値を話題にする際に周長を固定した長方形の面積を最大にする図形は正方形であることを題材に、その解説をはじめた点である。ｆ(ｘ)が極値をとるｘの値αの付近では関数の値の変化は、極めて緩慢である。そこでｅを極めて小さい値とすればｆ(α)　ｆ

＊1　仏語で「Methodus ad disquirendum maximum et minimum」, 英語で「MAXIMA AND MINIMA」
＊2　接線の定義は「円と１点のみを共有し、それ以外の点では共有しない直線」としている。

(α＋e)という近似等式が作れる。両辺を整理して共通の項を消去した後、全体の共通因数eで割り、なおeを因数に含む項を抹消すると、αが求められる。しかし、この e は不詳である。たとえ微小な値でも真の0でないなら抹消することができないし、0であるなら共通因数eを約すことが許されない。eは0でありそうでもあり、0でなさそうでもある。反対に0であってはならず、0以外であってもならない。つまり、フェルマーは、無い数を「あるものとして」考察していき（その差をEとおいている）、最後に「あるものとして」計算した数を消去するというダイナミックな考えを行う事で、極大や極小を得ることができると述べている。実際、極限や導関数の概念をはっきりとは定式化してはなく、十分に明瞭明快に説明することもできていなかった。がしかし、変数値をわずかずつ変えて近傍値を考慮するフェルマーの手法は、仮説を実践によって単に検証するだけでは、そこに誤りがないかどうか絶対的な確信がなかったため、厳密な数学的基礎付けの問題が提起されたことになり、以後ずっと極値を求める最初の体系的な無限小[*3]解析の基本となったのである。

この無限小解析の方法を数学に導き入れたことは数学全体を急速に変え、数学の役割を高め、自然科学の体系の中に数学を組み入れるという数学における大きな革命的な転換の基礎となった。フェルマーのeは、近代微積分の草創期における無限小概念の典型的な使われ方をしていることになる。また、無限小解析は 1 人の学者によって考え出されたものではなく、そうだからといって数人の学者の手によったものでもなく、また天才的な洞察によるものでもなかった。つまり、実に長い過程を経てはじめて完成されたものであることを忘れてはならない。

以上から、授業で取り扱う教材は、全く新しい題材であるよりも、生徒がある程度、習熟しているものであることが望ましいと考えられるため、本研究では、数学Ⅱ『微分法』を既習している生徒を対象とした。なぜなら、ある題材を歴史的な観点からみるということは、反省的な観点からみるということでもあるからである。そのため、本研究授業における生徒の活動に焦点を当てた一連の流れとしては、以下の通りである。

① 設定された問題を現代の考え方で、答えを求めてみる
② 一次文献である原典を読みながら、当時の人の考え方を追体験して、理解する。
③ 自分の知識と 17 世紀前半の考え方とを対比して何か不思議な所を探してみる。

---

＊3 『無限小』という語を定義するのは 19 世紀に入ってからである。コーシー(Cauchy, 1789-1857)は、「1 つの変数の絶対値が、限りなく減少し、どのような値を与えても、それよりも小さくなる、というときには、この変数は『無限小』であるとか、限りなく小さい量であるとか名づけられているものになる。」19 世紀になって今日の微積分学が体系化されるのである。

# ４．授業概要

## ４．１　授業環境

１）対象　　　　筑波大学附属高等学校　第２学年　有志　５名（男２女３）

２）時間数･実施月日

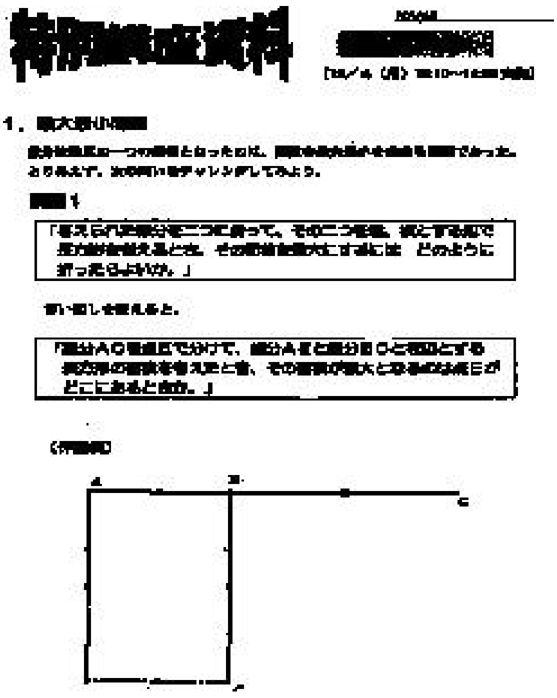
３時間（50 分×３）・平成 12 年 12 月４日(月)・７日(木)　放課後

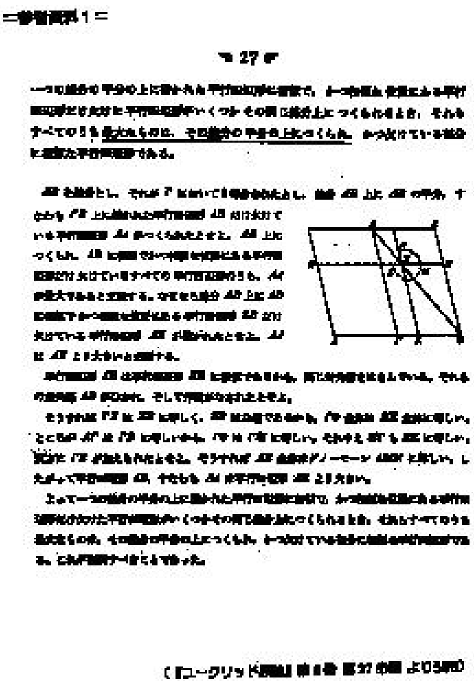
３）準備　　　　コンピュータ（Windows）6 台，作図ツール（Cabri Geometry Ⅱ），ビデオプロジェクター１台，Microsoft Power Point 2000，事前アンケート，事後アンケート，ワークシートを含む授業資料

## ４．２　単元名とその指導目標

数学Ⅱ『微分法』より「無限小解析における接線の考え方」
その指導目標としては

「フェルマーが 1629 年に書いたとされている最も初期の極大極小論の論文『極大および極小値研究のための方法』の一次文献である原典の解釈を通して、フェルマーにおける『無限小』の取り扱いをフェルマーの接線論に見いだし、巧みに用いて体感することで、今日の微分積分学の中にある接線の方程式の導き方と対比して、その根源にあたることを確認したい。」





**フェルマーの業績**

①17 世紀に近代数学において、『数論（整数論）』といわれる分野の創始者

**例）1995 年に 350 年以上も数学者を悩ませて続けてきた「フェルマーの大定理[*5]」が証明された。**

②解析幾何学つまり図形の問題を数式で表現しようと考えた創始者の一人

**(デカルトと共に)**

**例）「２変数の二次式はすべて円錐曲線をあらわす」を証明した。**

**③確率論**

- **サイコロ賭博の勝敗に関する問題が理論的確率論の出発点。**
- **インドからヨーロッパへ伝えられた魔方陣の研究**

**④微分積分学**

論理的には不十分ながら、接線や極値を求める方法や曲線$Y=x^n$の下の部分の面積を求める方法を考案.

**▼その他**

**座標の方法の一般数学的意義を発見**

## ４．３．授業展開

### 4.3.1　フェルマーの極大・極小（1時間目）

**授業の内容（授業資料）に入る前に、この講座でこれから取り扱うフェルマーについての基本的な知識[*4]と業績について、紹介をした。**（Microsoft Power Point 2000 スライドショーを用いて）**なお、授業中にフェルマーの業績について触れた部分は、左枠に記した通りである。次に授業資料（ワークシート）を開き、問題１を生徒各自、今まで培った数学の知識をフルに用いて考えてもらった。（約５分間）**

［注意］**生徒が実際に手を動かして、答えを見出してもらうことで、後に取り扱うフェルマーの解法と対比することができる。**

**問題 1;** 与えられた線分を二つに折って、その二つを縦、横とする辺で長方形を考えるとき、その面積を最大にするには、どのように折ったらよいか。

**つまり、言い回しを変えると、**

線分 AC を点 E で二つに分けて、線分 AE と線分 EC を縦、横の辺とする長方形の面積を考えたとき、その面積が最大となるのは点 E がどこにあるときか。

**以下はその後の生徒とのやり取りの様子である。**

授業者：「**答え**」と「**どういう方法を使って考えたのか**」を教えてください。

生徒１：線分ACの中点。二次関数としかいえないな。・・・出**てきた面積の式を因数分解みたいな形[*6]に**

**かえ**て考えました。

生徒２：ACの中点。２次関数かな。

**回収したワークシートをみたら、生徒全員が**「二次関数の最大最小の問題」**と認識して解いていた。**

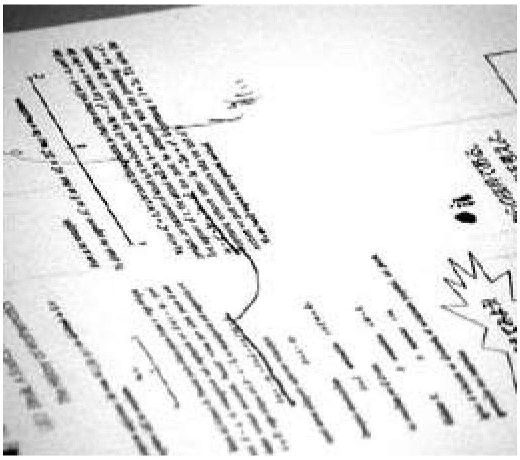
---

*4　例えば、いつの時代に生きていて、どこの国の人で、同時代に生きていた人は誰か。またどういう職種の人か、など。

*5　（命題）与えられた平方数を二つの平方数の和に分解する、すなわち、$Z^2$が与えられると方程式$z^2=x^2+y^2$をみたす整数x, yを求める。（ディオファントスの『数論』より）

「フェルマーの大定理」はこれを拡張して、『n≧３（n整数）のとき、$x^n+y^n=z^n$をみたす自然数x, y, zは存在しない』

*6　（この生徒のワークシートを見る限り、）平方完成のこと**を言いたかった様子。**



この問題１をフェルマーは一体どうやって考えたのかを理解させる。その際、一次文献である原典となる文章を題材として、実際に読み進めていきたい。その際、二つの文章を引用した。左にはフランス語で書かれた文章（仏文）と右には英語で書かれた文章（英文）を載せた。そして、次のような発問をした。

授業者：フランス語の辞書やフランス語の構文なんかを使わなくても十分君たちでもわかることがある。つまり、左と右の文章と対比して、何となく照らし合わせてみると、これがこのことを表しているのではないかな・・・とわかる部分がある。ではみんな、これから探偵さんになってもらって、いったい左の仏文のどれが右の英文のどこに相当しているか、何を表しているか、考えてみて下さい。（約３分程度）

その後、結果を合わせてみたら、全員の答えが一致していた。では、一次文献である原典の内容に移りたいと思うが、右の英文を全部和訳させたり、ましてや日本語訳の文章を皆で読んだりするのもつまらないと思い、穴埋め形式のページを用意し、次のように発問をしてみた。

授業者：数学の問題を解いているように、日本語訳の文章を途中、語句をおりまぜながら、数式を並べた表記にかえてほしい。もし日本語訳がを読んでも分からない所は、英文に戻って考えてみて下さい。

（約７分程度）

その後、穴埋めの結果を生徒に当てながらフェルマーの考え方を解説していった。その中で、誰もが悪戦苦闘していたのは、空欄⑦[7]である。生徒の空欄⑦の回答は、以下の通りである。これを見れば明らかだが、様々な結果である。

生徒A； $e$は決まっていないから、どんな数でもよいので、$e$を0に限りなく近いとすると、

生徒B； $\lim_{e\to 0}(b-2a-e)=0$

生徒C； $e=0$を代入すると

生徒D； $e$を近似的に0とすると

生徒E； $e$を削除すると

---

＊7　空欄⑦の前後関係は、「$b-2a-e=0$、⑦＿＿＿＿＿、$b-2a=0$ 」

4.3.2　フェルマーの接線法①（2時間目）

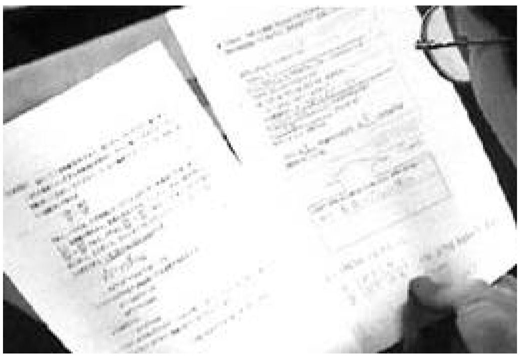
**解説後、次のような生徒の声を耳にした。**
**『何で、このとき最大になるの?…全然わからない。』**
**『（これでは）求まってないよー。』**
**『わかるような、わからないような・・・』**
**『これってホント？明らかにおかしいよ。』**
**そこで、次のような問いに答えてもらった。**

＜授業者 青木の解釈＞
～設問②に対して～

- **最初にｅは０でない極めて小さい数として導入しながら、最後にそれを無視して０にしてしまうなど、理論的には不完全なものである。**
- フェルマーは「ｅに限りなく小さくする」という表現は使っていないので、極限の考えはまだない。

**（問題１を終えて…）**
**上の解法で、①何か不思議に思ったこと、違和感を覚えたことがあったら自由に述べよ。②何が、これまでにない、フェルマー特有の考え方だろうか。**

生徒A ;①　ｅを除去する。長方形の面積。
　　　②　ｅを除去する。ｅを入れた場合を考える。
生徒B ;①　これが最大とは限らない。そもそも最大といえる理由は?（しかも日本語訳では、いきなりｅを除去すると書いてあるので、へっ!?と思った。）
　　　②　‘この部分（右図の塗りつぶしてある部分）の面積の差がたいしてない’ということ。
生徒C ;①　‘ａがａ＋ｅになったとき、長方形の面積にほとんど変化がない’ということ。
　　　②　ｅ≠０としておきながら、ｅ＝０としている。
生徒D ;①　何で、これで最大が求まっているのか。何でａに足す線分を＋ｅとおいてそれを０とするとき、式が変わっているのか。
　　　②　似的なものを考えること。
生徒E ;①　空欄⑦で、ｅが消除できる、すなわちｅ＝０ならば、空欄⑥で両辺をｅで割ってもよいのか。
　　　②　ｅを「ほとんど大きさのない数」とおくこと。



**ここで、ちょっと話題をかえて、次のようなことを発問して、生徒に考えさせてみた。**

授業者 ;**ある日あなたが、これまでにない目新しい方法が見つかり、これを誰か相手側に伝えるも全く聞き入れてくれないとする。そんな時、新たな手段を考えて、その方法をどうにか伝えたい。あなたなら、どうしますか。**

**生徒１；力づくで伝える。**
**生徒２；身の回りのものを使って説明する。**
**証拠を見せるとか証明するとか…。**
**生徒３；実践する。**
**生徒４；何か、ものを使って示す。**

授業者：こうしたら、どうだろう。

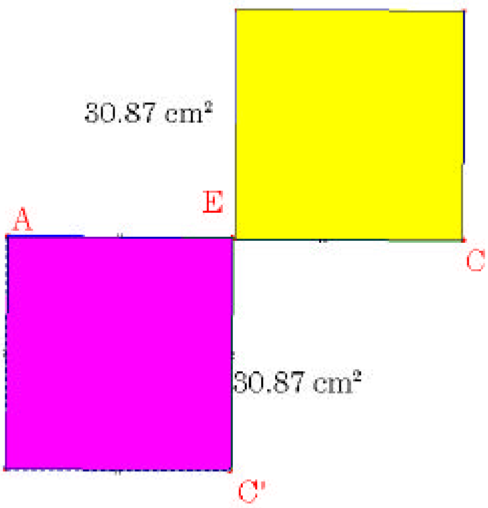
誰もが知っている題材を違う新しい言い方にかえる。つまり、『新しい、こういうやり方があるよ』というのではなく、『これまでにある結果を、異なる新しい方法を使って言い換えても、やっぱり同じでしょ。だからこの方法は正しいよね。』そこで、参考資料１をみてほしい。この第27命題は、ユークリッドが既に示していて、明らかになっている。この命題と皆に考えてもらった問題１とは同じものと考えてよさそうだから、フェルマーが考えた方法も、新しいやり方として認めることができそうだよね。

**このフェルマーの新しい考え方を、後でも使って、論を転じている。次に、２次元から３次元に次元を上げた、以下の問題２ではどうだろうか。この問題２は先程の問題１と同じ手順で取り組めるようにワークシート作成したため、次回までの宿題とした。そのため、問題２は紹介にとどめるだけにしたい。**

問題２；与えられた線分ACを点Eで切断し、線分AEを一辺とする正方形の上に、これを底面とする直方体を作図し、その高さを線分ECと考えると、その体積が最大となるには、どのように二つに分けたらよいか。

**つまり、言い回しを変えると、**

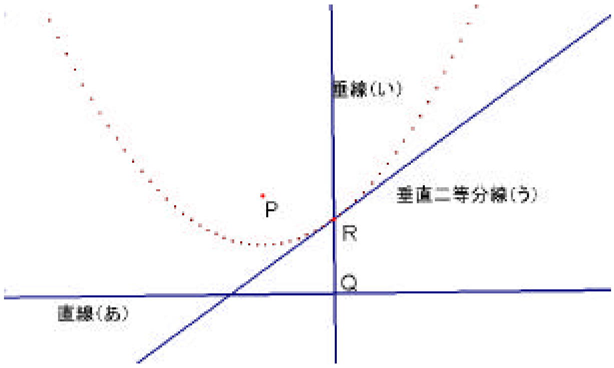
与えられた線分ACを点Eで内分するとき、$AE^2 \times EC$が最大となるようなAC：AEの比を求めよ。



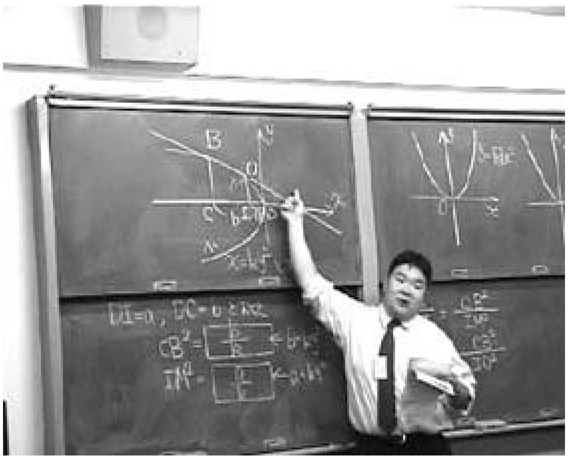

**問題３にはいる前に、生徒にこれから活動させる作図ツールであるCabri GeometryⅡ[*8]の紹介も兼ねて、まず問題１の結果を実際、視覚的に確かめることをした。**

**次に、Cabri GeometryⅡを用いて、放物線を作図することを生徒の活動とさせたい。しかし数学C『二次曲線』は未習であるため、まず放物線の幾何的な定義を教えた後、次のような手順で生徒と同時平行しながら行った。**

*8 Cabri GeometryⅡは、Texas Instruments社の登録商標である。

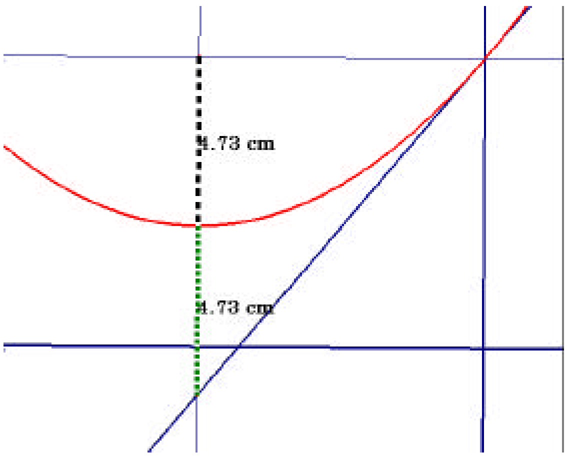



［手順］
① 好きな所に点Ｐを打つ。
② 点Ｐと離れた所に直線(あ)をひく。
③ 直線(あ)上に点Ｑをうち点Ｑを通る垂線(い)をひく。
④ 点Ｐと点Ｑの垂直二等分線(う)をひく。
⑤ 垂線(い)と垂直二等分線(う)の交点を点Ｒとおく。
⑥ トレースのボタンを押し、点Ｒをクリックして、点滅させたらつまんで動かすと、放物線の概要が見える。
⑦ 軌跡のボタンを押し、点R、点Qの順にクリックすると放物線が書ける。



### 4.3.3 フェルマーの接線法②とバロウの接線法（3時間目）

**問題３をフェルマーは一体どうやって考えたのかを、問題１と同様、一次文献である原典となる文章を題材として実際に読み進めていきたい。しかし、数式で言いかえた方が明瞭かつ簡潔であり、考えやすくするため、現代の表記であるｘｙの座標平面で考えさせ、解説をした。**




**解説後、Cabri GeometryⅡを用いて簡単に２時間目で行った放物線の作図の仕方を振り返った後、問題３の結果が実際、本当に等しい関係になっているか、視覚的に確かめることをした。さらにまた、問題１と同様に、**自ら提案する方法が有効であることを確しかめるため、当時、既存の方法を利用している。すなわち、**問題３の結果について、「アルキメデス方法」の命題４**(参考資料２)**の中に記されているため、既知であったといえる。**

**問題３を終えて，前回の問題１と同様、次のような発問をした。**
**授業者；上の解法で、何かあいまいに感じることがあったら、自由に述べよ。**

**生徒A：何でｅを除去するのか。**
**生徒B：もともと接線はあると仮定している所から、**
**話がはじまっている所。**
**生徒C：ｅの存在。**
**生徒D：またｅを０とおいている！**
**生徒E：やっぱり空欄④,⑤での‘ ｅ ’の扱い。**

＜授業者 青木の解釈＞

- 接線とは、限りなく近い２点を結んだもの という考えに立っているが、「限りなく近い」から「一致する」とはならないため、この点があいまいのままである

**問題４に入る前に、アイザック・バロウ[Issac Barrow](1630-1677,ｲｷﾞﾘｽ)の人物や業績について紹介をした。** (Microsoft Power Point 2000 スライドショーを用いて)
**その際、バロウは「まず**始まりとして、**自分で手を動かしてみること」を強調していることを述べた。**
**これまでと同様、問題４の原典である英文やその日本語訳をヒントとして、実際に今日の数学の問題として、空欄に必要な数式や語句を並べて、記述させた。このバロウの方法として特徴的なことは、微小な三角形とフェルマーのＥとを巧みに結びつけたことや、変数の微小変化ｅに対する関数値の変化ａをとって、ａ／ｅという微小量の比が現れることが挙げられる。**
**その後、この問題４のバロウの方法と、先程の問題３のフェルマーの方法とを比較して、相違点と共通点を、自由に述べさせてみた。**
**これを箇条書きで記すと・・・**

＜相違点＞

- **ｅのような存在が２つでてきた.**
- **ｅだけじゃなく，ａも０とおいている**
- **「ｅで割る」という作業がない。**
  **だけど、ｅ＝０とおいている？**
  **でも，ａ／ｅということだから,**
  **やっぱりｅ≠０？**

＜共通点＞

- **⊿ＭＲＮ∽⊿ＭＴＰと考えているから,**
  **ｅの存在をうまく使っている。**
  **１つの点における，固定点の接線が**
  **最初に引かれている.**
- **図形的**
- **非常に微小な値ｅをおき,**
  **それを無視する方法**

＜授業者 青木の解釈＞

[相違点]

- フェルマーが唯一つの微小量を用いたのに対し、バロウは、二つの微小量を使って、接線を決定する方法を考えた。

**[共通点]**

- **接線とは、曲線と唯一点を共通するものであるという固定的、静的接線観に基づいている。**

## ５．考察（ﾃﾞｨｽｶｯｼｮﾝ）

**教育における数学史の利用の考察にあたって、二つの両極の存在が明確になると礒田正美氏（1987）は考える。**

一つの極は数学の学習のための教育的配慮を主眼にし、数学の形成史を意識しない立場であり、もう一つの極は、形成の立場からの数学史の学習が数学自身の理解に結びつくという立場である。しかし、数学学習の過程を、『どうしてこういうことを考えたのか？』というように、子ども自身が疑問符による活動を通じて数学の形成過程の追体験（同じ体験を意味しない）の場として構成し、数学のもつ創造的な人間活動を通じての人間形成にあるために、数学史を利用しようとする新たな立場の設定が必要である。この活動から、数学史に対する真の理解をもたらすと共に、創造的な活動としての数学に対する理解、数学的な思考方法の理解を深め、さらには数学（教材）の正しい認識にたって授業を進める事がより可能になる点として意義がある。

**これより以下,一つひとつ下位課題について考察していく。**

［**課題** 1］　一次文献である原典を読みながら追体験することで、連続性・発展性を感じ取り、数学では絶えず新発見が行われていることを認知する。

**以下のアンケートの抜粋である。**

- 人によって、一つのことを証明するのに、いっぱい方法があるのだなぁ。
- 昔のいろんな人が、いろんなやり方を考えていた中の一つを学んでいたんだなぁと思った。
- 長い歴史の中の数学への人々の認識の移り変わりを見ることができた。
- 今、当たり前に証明できるものも、長い歴史の中で試行錯誤して編み出された証明なのだろう。

**これより生徒は数学の連続性・発展性を感じ取ることができたと認識でき、数学観の変容がうかがえる。上野健爾氏(2000)は、数学の難しさについて以下のように述べている。**

**数学の概念を教えるのが何故、難しいかは数学史を見てみたら分かる。数学の非常に基本的な概念というのは何百年、何千年かかって出てきているわけです。そういうことを知った上で教えるのと知らずに教えるのとでは随分、違うんじゃないかという気が最近してきているんです。**

**また私が、敢えて一次文献である原典にこだわる理由として**

**「数学史研究が陥りやすい陥？ が２つある。１つは、資料を解読する際、歴史の隔りを無視して、現代的表現におきかえ、現代の立場から評価を下してしまうこと。そしてもう１つは、その反対に、異文化間の翻訳の不可能性の看板を揚げて、資料の現代的分析を怠るということである。」と、長岡亮介氏(1987)は述べている。**

［**課題** 2］　新しい方法論によって、古い問題の鮮やかな解決が得られたことではなく、新しい数学の問題が提起され、新しい数学の分野が切り拓かれる、つまり、「新しい、まだ浸透していない考え方をどうやって相手に理解させるか」という問いに、どう対応するかを念頭において考える。

以下は、生徒のアンケートの抜粋である。

- 数学的発想ができなかった。
- 彼らの思考回路が謎だった。（別に、納得できない訳ではないが・・・）
- 私の数学的センスのなさのせいのような複雑な気分に苛まれて仕方がない。
- 理屈の分からないまま、「こうだから」と言われて、とりあえずやってみるだけのことが多すぎた。

これより、自ら提案する方法がダイナミックな方法であればあるほど、直ちに受け入れて吸収し、認識することは極めて難しいといえる。礒田正美氏（1999）は「当時の人が納得できる事例で、自ら提案する方法が有効であることを確認した上で、未知の場合へと議論を進めている。」という。さらにこのことをもっと掘り下げて数学者の意図･目的について、次のように述べている。

数学の再構成、新数学の創造を目論んだ数学者は;

○　新しい方法を持っていた。
○　その新方法は既存の方法より強力であると信じていた。
○　新方法による結果は既存の方法で支持されるべきことを知っておりその数学者においても二つの方法は併存していた。

社会的な視野から述べれば、次のように言える。

◎　他の人々はその数学者の新方法を必ずしも知らなかった。
◎　新方法を知る数学者は、知らない人々へ新方法を広めようとした。
◎　新方法を知る数学者は、知らない人々に新方法を説明し、よく知られた既存の方法でその妥当性を確認した。

上記の意図目的の記述から、新数学創造を目論んだ数学者は、既存の数学から新数学を抽象したわけではなく、既存の数学で妥当性を確認することを通じて新数学の創造を進めたことがわかる。

［**課題３**］　子どもが数学に対する見方を変え、数学が変化し、発展するものであると捉えられるよう、数学史を生かした指導を提案することである。

以下の生徒のアンケートの抜粋は、生徒が数学に対する見方や姿勢が変わったと思われる箇所である。

- 数学というのは、昔の誰かが思いついたやり方を昔から今までずっと習うものだと思っていた。
- まだ、完成されていない計算方法に触れることで、今「公式」として受けている様々な知識を「疑ってかかる」姿勢を持てた。
- 主体的に学ぶ姿勢に欠けていたのかもしれない。与えられた「穴埋め問題」しか問けない。自分で文献を探し、問いていくことがこれからの課題だと思う。

またある生徒は自ら、以下のような自分なりの解釈をもつことができた。

「今では“ｅ”みたいな存在をあやふやなままにしているが、今後、もし優秀な数学者が現れて、“ｅ”の存在を確立、または、くつがえすような発見をしたら、面白い。でも、“ｅ”があやふやだと私が思うのは、昔の人に比べて、デジタルな世界に生きている現代人だからかもしれない。」

**結果的に、数学というものを生徒は、以下のような学問だと捉えたようである。**

- 認識を変えるきっかけがあるとすんなり理解できたりするようなところもある学問。
- 様々な事象を 数」という常に確実なものを頼りに、より単純に、より一般的に広げ、多くの事象をできるだけ少ない法則によって、説明しようとする学問。

**先行研究の事例から数学史が指導において、沖田和美氏（）は、多様な面で生かせることを次のように述べている。**

- **先人が獲得するのに困難とした内容から、子どもが学習する際に困難とする所を予感する。** （グローバルな視点から見たある概念の獲得の歴史）
- **数学の厳密さとともに、創造の過程を知らせる、あるいは体験させる。** 厳密さを求めて発展する数学の歴史）
- **内容ごとの有機的つながりを知らせる。（歴史から分かる数学の有機的つながり）**
- **内容のよりよい理解を助ける。** 歴史から分かる数学の異積性）
- **文化としての価値を示し、動機づける。** 数学の文化や科学との関わり）
- **数学者たちの努力を示し、数学をすることへの自信を与える。** 歴史上の数学者たちの努力）

**数学史を扱う場合の指導上の留意点を松尾孝司氏(2000)＊[9]は簡単ではあるが、次のようにまとめている。**

- **いわゆる『数学史のお話』になることのないよう、生徒の活動等を入れながら指導していくことが大切である。**
- **レポートによる評価を取り入れるなど、評価の方法を工夫することが必要である。**
- **数学の歴史を扱う場合、取り扱う内容が史実なのか伝承なのかを指導者が確認しておく必要がある。**

［**課題４**］　作図ツールを用いることで、幾何学的には放物線がどう書けるかを体験することで、視覚的に理解できる。また、求めた答えを吟味するために、作図ツールを用いることで、視覚的に確認できる。

**本研究の授業で、生徒が一番の印象として挙げるものを以下に記す。**

- **パソコンを使って、接線を書けたのが楽しかった。**
- **コンピュータは素晴らしい。未来の黒板はスクリーンだ！**
- **あのソフト（カブリⅡ）はすごい。**

**また、**「数学をするときに、どんなものを使うか」**という問いに対して，事前・事後を見比べると、ある生徒は、「カブリ」と書き加えていた。これより、コンピュータのソフトを用いた授業がいかに新鮮で、印象的であったのかがわかるだろう。コンピュータが生徒の学習の補助となる場合を考えて、コンピュータのシミュレーション機能を活かした図形処理ソフトは生徒の主体的な問題解決学習に役立てられ、主体的に考えを進めようとする学習姿勢には必要不可欠である。しかし、それが十分でないと、教師がコンピ**

＊[9] **吉田明史・飯高茂編著「高等学校学習指導要領の展開　数学科編」（2000･8,明治図書）**

ュータを使って問題解決の方法を生徒に教え込んでしまうという危険性をもっていることに注意しなければならない。

## 6．おわりに…

本研究では，微分の草創期にみられる問題とそれに対する創始者フェルマーのダイナミックな考えを教材として取り扱ってきた訳だが、さらに視野を広げると､次のような微分の応用問題が取り上げられる。ケプラー（Kepler, 1571-1630）がブドウ酒を樽で買ったとき、商人がブドウ酒の樽の側面の中央から樽底の一端にあたるまで斜めにものさしを入れて測るだけで、樽の容量を計算しているのをみて、大変不思議に思い、樽の寸法を調べてみると、どの樽も底面の直径と高さの比が大体２：３になっているという結論を出したという。その結論を出す経過がケプラーの「葡萄酒樽の新しい立体幾何学[＊１０]」(1615)に書かれているため、これを教材化してみるとよい。

また、接線法において割線の極限として動的に見る考え方で、話が展開されているデカルト(Descartes, 1596-1650)の「幾何学」(1638)を授業教材として取り扱うのも、おもしろい。竹之内脩氏（1999）は、微積分の中で他にもぜひ取り上げてみたい項目として、以下のようにあげていると同時に、ぜひ先生の見識で生徒の発展の芽を育てていただきたいと述べている。(括弧内引用者注)

- 17 世紀はじめのガリレイ（Galilei,1564-1642）、ケプラーの偉業
- 日常の現象としての速度、加速度などの意味
- 積み重ねで面積、体積などの計算
- ニュートン（Newton, 1643-1727）、ライプニッツ（Leibniz, 1646-1716）による微積分学の確立
- 19 世紀はじめのフーリエ（Fourier, 1768-1830）によるフーリエ展開の創始。その前に、交流などを通じての正弦波の導入、あるいは三角法の長い歴史。

また、他の授業展開の仕方として、礒田正美氏（1987）は以下のように、提案している。

「生徒の差分法の発想を微分の考えに改めることを目指して、考察の場面に教材として、ガリレイの「新科学対話」を選び、授業へ活用することも考えられる。」

数学者の知的な営みの偉大さは感じ取れるが、その一方、数学史を学んだからといって必ず、数学が面白くなるという訳ではない。学校で数学史を主とする教材を取り扱うのは有限であり、また一連のものの中の１つだけを取り上げたにすぎない。安藤洋美氏（1999）は、『数学史導入にあたっての懸念』の中で、次のようなことを述べている。

---

＊１０　独語では「Nova streometria doliorum vinariorum (1615)」

数学の知識を前提としない数学史などありえない。とすれば、高校に数学史を導入するとすれば。最も高度の数学的知識を与える教科目の中に入っていなければ、効果は期しがたい。

また、数学の面白さは、別にもたくさんあることを忘れてはならない。数学史全般に対して、どういう位置付けにしていくか定まっていないが、数学者と数学史の専門家が知識を共有してよりよい教材化をしていく必要があると思う。


謝辞

研究授業の実践に際して、国立筑波大学附属高等学校の数学科主任の川崎宣昭先生をはじめ，数学科の飯島忠先生、大野昭次先生、利根川誠先生、中田庸男先生、矢野一幸先生には貴重な御意見、御指導をいただきました。厚く御礼申し上げます。

註１　本研究は、科学研究費、基盤研究Ｂ(2)展開研究（課題番号 10558032、研究代表者　礒田正美）の一貫として行われた。


註２　授業の詳細並びに資料等は次に掲示している。
http://130.158.186.11/mathedu/forAll/project/2000/index


引用文献

□ P. de Fermat 「 Methodus ad Disquirendam Maximam et Minimam 」 OEuvres de Fermat (1629)

□ 中村幸四郎・寺阪英孝・伊東俊太郎・池田美恵訳「ユークリッド 原論（縮刷版）」P62-78,141-142（1996・共立出版）

□ 佐藤徹訳「アルキメデス 方法」P34-39（1990・2，東海大学出版）

□ D.J.Struik，「 FERMAT， MAXIMA AND MINIMA」 p222-227 (A Source Book in Mathematics ) Cambridge， Mass. : Harvard University Press，1969

□ D.J.Struik 「 BARROW,THEFUNDAMENTAL THEOREM OF THE CALCULUS」 p253-263 (A Source Book in Mathematics ) Cambridge， Mass. : Harvard University Press，1969

□ 近藤洋逸「フェルマーの極大極小法及び接線論」「近藤洋逸数学史著作集 第３巻 数学の誕生・近代数学史論」p274-299（1994・9，日本評論社）

□ 文部省　「高等学校学習指導要領解説数学編」P20-25,31-39（1999・12，実教出版）

□ 吉田明史・飯高茂編著「高等学校学習指導要領の展開　数学科編」P68-83（2000・8,明治図書）

□ 竹之内脩「数学の教育内容をどう考えるか」数学教育 NO.494 P5-12（1999・1,明治図書）

□ 安藤洋美「数学史導入にあたっての懸念」数学教育 NO.494 P13-15（1999・1,明治図書）

□ 小平邦彦「怠け数学者の記」P120-124

（2000･8，岩波書店）
□　長岡亮介「私の数学史行脚」数学セミナーP30-34（1987･3）
□　小堀憲「コーシー微分積分学要論」P4(昭和 44･7，共立出版)
□　礒田正美「数学の弁証法的発展とその適用に関する一考察」筑波数学教育研究第 18 号　P11-20（1999）
□　沖田和美「学校数学における数学史を生かした指導に関する一考察」筑波大学大学院教育研究科 平成 7 年度修士論文
□　上野健璽＋佐々木力「歴史の中の 20 世紀数学」『数学の思考』現代思想 10 月臨時増刊(2000･10，青土社)

## 参考文献

□　中村幸四郎「数学史─形成の立場から─」p63-78（昭和 56･2，共立出版）
□　山崎昇･保坂秀正訳「グレイセル　数学史Ⅲ」p57-60（1997･10，大竹出版）
□　加賀美鐵雄･浦野由有訳「ボイヤー　数学の歴史３」p98-120（1984･6，朝倉書店）
□　Carl B. Boyer「A HISTORY OF MATHEMATICS」p367-384（1985, Princeton University Press）
□　岡部恒治監訳「数学を築いた天才たち（下)」p18-33（1993･11，講談社）
□　岡部恒治監訳「数学を築いた天才たち（上)」p216-232（1993･11，講談社）
□　井関清志･山内一次訳「ルイブニコフ数学史Ⅱ」p223-247（1965･3，東京図書）
□　長岡亮介,「数学の歴史」p88-96（1997･3，放送大学教育振興会）
□　片野善一郎「数学史の利用」p126-139（1995･9，共立出版）
□　近藤洋逸「フェルマーの極大及び極小値研究のための方法」「近藤洋逸数学史著作集 第３巻 数学の誕生･近代数学史論」p274-299（1994･9，日本評論社）
□　黒田孝郎「数と文明 99 の謎」p182-186（1976･10，産報）
□　国立教育研究所「数学教育の国際比較─第 2 回国際数学教育調査最終報告─」(1991･4，第一法規）
□　礒田正美「数学学習における数学史の利用に関する一考察」筑波大学附属駒場中･高等学校研究報告　第 26 集　1987･3
□　神長幾子「高等学校における微積分の背景－17 世紀の微積分学形成史の考察－」筑波数学教育研究第４号　Ｐ７６-85
□　神長幾子「高等学校における微積分指導に関する一考察－微積分学形成の歴史を踏まえて－」筑波大学大学院教育研究科 昭和 59 年度修士論文

## （付録）アンケートの結果

**以下は、生徒A～Eの５人のアンケートにおける記述を抜粋したものである。**

Q1：「①この授業を通して、あなたが変わったなぁと思うことを自由に書いてください。また、②どのようなことがきっかけで、あなたは変わりましたか。」

A ①一つの問題に対して、いろいろな考え方が存在するということがわかった。人によって、一つのことを証明するのにいっぱい方法があるのだなぁ。
②人（フェルマーやバロウなど）によって、接線の証明の仕方が全然違っていたため。

B ①数学というのは、昔の誰かが思いついたやり方を昔から今までずっと、習うものだと思っていた。しかし昔のいろんな人がいろんなやり方を考えていた中の一つを学んでいたんだなぁと思った。
②そのきっかけは、バロウさんとかニュートンさんとかデカルトさんとかフェルマーさんとかいろんな数学者がいて、その人たちがいろいろ考えたことを知ったから。

C ①私は、数学が苦手なんだということを再認識した。デカルトが、数学界でも成果をあげていることに感動を覚えた。
②数学的発想ができなかった。やっぱり私は文系の道に進んだほうがいいのかもしれない。

D ①フェルマーさんには、極限値という概念はなかったんだと知った。長い歴史の中の数学への人々の認識の移り変わりを見ることができた。
②授業をうけたから

E ①まだ、完成されていない計算方法に触れることで、今「公式」として受けている様々な知識を「疑ってかかる」姿勢を持てた。今、当たり前に証明できるものも、長い歴史の中で試行錯誤して編み出された証明なのだろう。
②上記のように、未完成の「数学」に触れること。参考書等をよんでも、今ある「正解」しか残されていないので、なかなか触れる機会がない。

Q2：「この授業で一番印象に残ったことは何ですか。（授業の内容と関連づけて答えて下さい。）」

A パソコンを使って、接線を書けたのが楽しかった。また、いろいろな証明の仕方がわかったので面白かった。

B 第一には、コンピュータは素晴らしい。未来の黒板はスクリーンだ！第二に、授業の内容では、やはり、“ｅ”の存在。0に限りなく近づけるという考えもないのに、どうしてｅで割ったり、除去したりしようという発想に至ったのか、彼らの思考回路が謎だった。（別に、納得できない訳ではないが・・・）そして第三には、今では“e”みたいな存在をあやふやなままにしているが、今後もし優秀な数学者が現れて、“e”の存在を確立、または、くつがえすような発見をしたら面白い。でも、“e”があやふやだと私が思うのは、昔の人に比べてデジタルな世界に生きている現代人だからかもしれない。

C 文字が縦横無尽に富んでいたのがとても印象的だった。あとフェルマーたちの強引さ。

D あのソフト（カブリII）はすごい。ｂisは二倍。

E 読みが甘かった。「～との相違点は？」という質問に、見当はずれの答えを出したりしてしまった。主体的に学ぶ姿勢に欠けていたのかもしれない。与えられた「穴埋め問題」しか問けない。自分で文献を探し、問いていくことがこれからの課題だと思う。

Q3：「今回の講座を受講して、率直な感想を、その理由を含めて、書いてください。」

A 微分を考えるための一つの知識として、ためになった。微分について少し見えた。

B この講座はちょうどよかったし、難しい所もうまい

具合に混ざっていてよかった。

C 微分の授業だったはずなのに、あまり微分をやらなかったような・・・。これはやはり、私の数学的センスのなさのせいのような複雑な気分に苛まれて仕方がない。

D 短かったです。穴埋めは集中しました。とても丁寧に教えていただいて、ありがとうございました。

E 理屈の分からないまま、「こうだから」と言われて、とりあえずやってみるだけのことが多すぎた。あと、時間が少なすぎ。物足りない。

Q4：講座案内のチラシを見たときに「微分」という言葉を聞いて、連想したものを教えてください。」

A リミット。授業であまり、やっていなかったため、あまり連想しなかった。

B 微分、イレブン、いい気分♪

C 微と徴は、よく似ている。

D グラフを書かされるかと思った。

E 「極限」についての講座かと思った。まさか微分という学問の生長の記録とは・・・。

Q5：「作図ツール『Cabri GeomertryII』のメリットは、あなたにとって、どんなことだと思いますか。」

A いちいち手で書く手間が省ける。

B 軌跡を正確に、速く書けること。

C 動画ができること。

D fun。

E 解くになし。デメリットならいろいろあるけど・・・。理屈が理解できない。)

Q6：「数学をどんな学問だと思いますか．」（事前→事後）

A 謎解き──>謎解き、一つのことにあきらめずに取り組む学問。

B 動物から見れば全く必要のない学問。──>謎。

C 数を扱う学問。──>左脳をよく使う学問だと思われる。

D 得意、不得意がある学問。量をこなすことが必要な学問。むずかしい学問。──>得意、不得意があるけど、認識を変えるきっかけがあるとすんなり理解できたりするようなところもある学問。

E 「実在」とは少し離れた「概念」を扱う学問。より少ない定義で、多くの発見を生む学問。──>「科学」の基本。様々な事象を「数」という常に確実なものを頼りに、より単純に、より一般的に広げ、多くの事象をできるだけ少ない法則によって、説明しようとする学問。

Q7：「数学をするときに、どんなものを使いますか。」（事前→事後）

A コンパス、定規、紙 ──>図形を書くための道具。

B 頭と紙とペン。──>普段使わない脳、紙、自然、筆記用具（筆も含む）、下敷き。

C シャープペンシル、消しゴム、紙、頭。──>紙、筆、頭、資料、手。

D 定規、計算用紙。──>カブリ、定規、コンパス、頭。

E 計算用紙、筆記用具、参考書（公式を出すまで・・・みたいなもの）。──>計算用紙、筆記用具、各種定規、やわらかい頭、そして、「時間」。