一次文献を用いた授業による生徒の数学観の変容に関する一考察
～ユークリッド『原論』，フェルマー『平面及び立体の軌跡論入門』の解釈を通して～

土田知之
筑波大学大学院修士課程教育研究科

章構成

要約

本研究では生徒の数学的内容に対する解釈の多くは歴史的視点の欠いたものが少なくないという観点のもと, 数学史を活用した授業が生徒の数学観の変容に及ぼす効果を探ることを目的とする. そこで，ユークリッドの名著『原論』とピエル･ド･フェルマーの著作『平面及び立体の軌跡論入門』を用いて研究授業を行なった．結果を分析，考察した結果生徒の数学観の変容に効果があることがわかった.

1．　はじめに

ほとんどの生徒は学校教育の授業の中で数学を学んでいる．生徒が抱いている数学観，特に数学的内容に対する解釈の多くは教科書から獲得したものであるとも考えられる．具体的な数学的内容についての歴史的背景が記せられている教科書はあまり多く見られない．したがって生徒の多くは必ず存在している歴史的背景という視点をなくして解釈している場合が少なくない．E.H.カーの「過去は現在の光に照らして始めて私たちに理解できるものでありますし，過去の光に照らして始めて私たちは現在をよく理解できるものであります.」という言葉からも数学的内容の歴史的背景についての認識の意義を見出せるだろう．そこで本研究では数学史を活用した授業により生徒の数学的内容に対する意識がいかに変容するかに焦点を当てる．ただし，ここで数学史を扱う際,恩田（1998）と同様に一次文献の利用とその意義を認め，活用す

ることとする.ところで神長（1984）, 沖田（1995）, 後藤（1996）, 恩田（1998）など，数学史についての研究はみられるがそれを活用した授業の実践例は多くない．そこで私は平成１１年高等学校学習指導要領の「図形と方程式」の単元のなかで目標として挙げられている「座標と式を用いた処理の有用性」に注目した．ところで薬師寺（1997）は解析の歴史的変遷を踏まえた曲線の探究に関する一考察の中で幾何と代数の融合の可能性について述べているが具体的な授業実践がみられない．また礒田（1997）は関数的視点から代数と幾何の融合の必要性を述べている．このような観点で本研究では，代数的表現と幾何的表現の融合の有用性に着目し，生徒の一次文献の主体的な解釈を通して，生徒自身がその有用性にさらなる価値付けすることが可能であることを例証することを目的とする。

２． 目的，方法

本研究の目的は以下の課題に答えることである．

課題　一次文献を用いた授業が生徒の数学的内容に対する認識の変容に効果を及ぼしたか.

ここでの数学的内容とは幾何的表現と代数的表現の融合についてとする.

本研究の課題に答えるために，本研究では以下の方法をとる．一次文献を用いた研究授業を行ない，授業実践をビデオに記録する．そして生徒自身による一次文献の解釈の活動に着目して，その効果をアンケートを通じて検証する.

３． 研究授業

（１）実施概要

①対象とした生徒

国立大学附属高等学校　２学年

希望者 7 名（「図形と方程式」既習済み）

②実施時期

平成 12 年 12 月 4 日と 7 日の放課後

（２）授業目的

幾何と代数の融合における歴史的な一側面を体験する.

～『原論』と『平面の及び立体の軌跡論入門』を通して～

（３）教材について

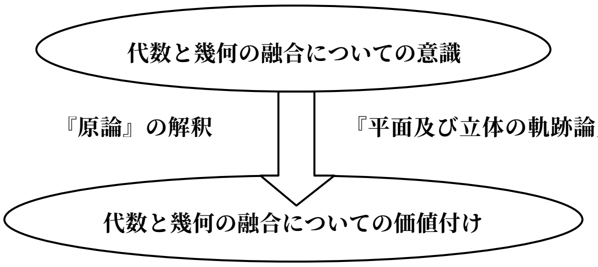
『原論』は紀元前 3 世紀に書かれたユークリッドの名著であり，当時のはっきりとした幾何と代数の融合がみられなかったという例として用いた．

『平面及び立体の軌跡論入門』はフェルマーの著作である．軌跡についての内容であり座標幾何学の幕開けと位置付けられている著作の一つである．

『原論』・・幾何と代数の融合がみられない例

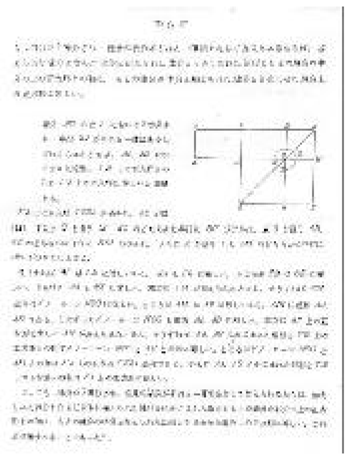
『平面及び立体の軌跡論入門』・・代数方程式を軌跡の概念を用いて幾何的表現している例

これらの一次文献の解釈を通して以下のようなモデルをねらいとする．



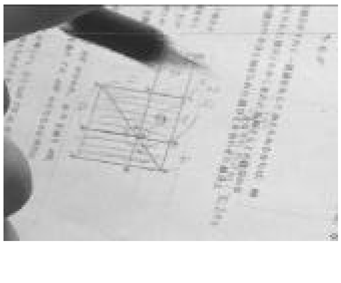
（４）授業経過と考察

①『原論』の解釈



（活動１）各自でワークシート（左）で『原論』の二巻の命題六（「ユークリッド原論」共立出版株式会社）を読み，解釈する．

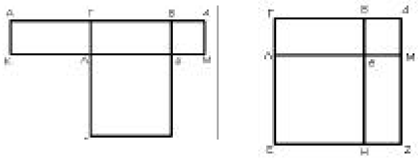
『二巻』の解説・・・二つの定義と 14 個の命題からなる小編．内容は一般量の和･差･積を取り扱い，かつこれらの量の平方根を問題にしていて，現在の二次方程式に相当する問題にも及んでいる．そのうち「命題六」の代数的意味は$(2a+b)b+a^2=(a+b)^2$である．



活動１の様子

活動２の様子

この内容は下図の二つの図形の面積が等しいことを説明している。



（活動２）このことを代数恒等式で捉えてみると・・・.

AΓ＝ΓB＝a，B⊿＝b とするとき

$$(2a+b)b+a^2=(a+b)^2$$

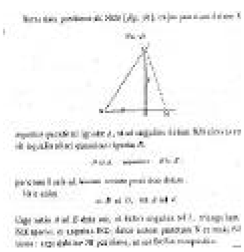
『原論』を読んだ後に生徒にインタビューしたところ，「内容が難しくないが不思議，複雑」,「ここまで（文章のみの説明を）やらなくても」「でも当時の人はそれはそれで分かりやすかったかも」などの感想が出た．生徒はこの命題の内容理解にはそれほど困難を感じないでいる．また当時の数学それ自身に価値づけをしている生徒も見られた．しかし一方当時の制限された表現に戸惑いを感じている．このあとのアンケートでは「今では当たり前のように使われている記号代数も昔は考えつかれておらず，いちいち線分や面積でものごとを考えなければならず，大変なことであっただろう．記号代数はすごい発明だ.」という生徒もいた.

②『平面及び立体の軌跡論入門』の解釈

（活動）生徒は各自でワークシートを用いて原典を読む．原典はフランス語のため英語訳を用いた.

（左下）原典『AD LOCOS PLANOS ET SOLIDOS』（OEUVRES DE FERMATpp.92）

（右下）英語訳（Struik　A source Book in Math pp.145-146）

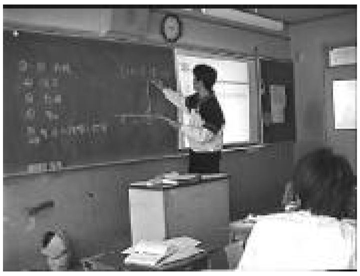


（参考・日本語訳）NZMを与えられた直線とし，N はその直線上の定点とする．NZ を未知量 A とし、与えらた∠NZIで接触している線分 ZIを他の未知量 E に等しいとする．DA＝BE のとき，点 I は位置の与えられた直線を描く．なぜなら、B：D＝A：E．ゆえに A と E が比例し、Z の角度は与えられているので⊿NIZ の形と∠INZ が定まる.ところで点 N は定点、NZ は位置の定まった直線である．それゆえ NI は位置の定まった直線となり、構成するのは容易である．

教師は生徒がそれぞれに理解の進んでいる様子を確認して・・・

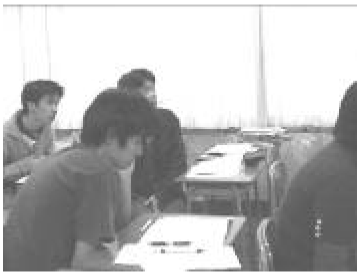
教師「自分なりに理解できた人？」

数人の生徒が手を挙げる．他の生徒の押しもあり生徒 A が前で説明することになる．



生徒 A の活動

生徒 A「まず，直線上に N,Z,M をとり，この N を定点とする．②では NZ が A という未知数をなる．③で NZI をきまった角度にして線分 ZI を引き，ZI を未知数 E とおく．DA=BE のとき B と D は定数だから A と E は比例した数．このとき I というのは決まった直線を描く．」

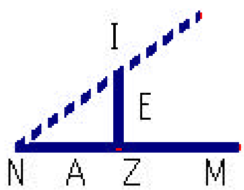


他の生徒の様子

教師「ここまで質問などある人は？」

他の生徒も理解している様子．

生徒 A「⑥で B:D=A:E が与えられている．B と D がきまっているので A と E が決まる．⑧の最初では I を決めるときに角 NZI を与えたといっていて NZI が決まっていて NZ：ZI の線分の比は決まっているので三角形 NZI の形は一通りに決まっているので角 INZ の値も決まる．ここで点 N は動かない点で線分 NZ も決まった直線上にある．なおかつ三角形 NZI の形が決まっているので I の動く直線が一通りに決まる。」



生徒の作図例

教師「(一人一人に）わかった？」

生徒全員がうなずく．

生徒 A に対して拍手喝采

生徒の A の説明をはじめ，生徒全員が内容の理解した様子であった．

４．議論

授業終了後，生徒たちに「この授業を通して，あなたが変わったなぁと思う事を書いてください」という質問の答えをアンケート用紙に記入してもらった．結果は以下の通りである．

【アンケート結果】

・(生徒 A) 数学に対してのイメージというか，そういうものがまた少し変わった気がする．やはり，図形だけ，式だけでは理解しづらい．よく考えたら，図形を式で表すという考え方自体すごいと思った．また，表せてしまうこともすごい．
まだ今のような方程式がない時は，フェルマーの文のように，今よりとても分かりづらく，まわりくどいことを，言葉のみでなんどもいわなくてはならなかった．理解するのにもかなり苦労した．しかし，フェルマーなどによって，今ではどんなにも数学が分かりやすくなっている．この功績は本当にすばらしいと思った．

・(生徒 B) フェルマーのとてもまわりくどいというかわかりにくい証明を見て座標のありがたみを感じた．意外に基礎的なことと思われる事が実は歴史的にはすごく複雑な背景がある．

・(生徒 C) 高１の終わりで「図形と式」という単元を学んだとき，それまでの初等幾何の方がよいし，分かりやすいと思っていたのですが，なんとなく先生に「方程式を使うと楽だ」といわれ，そう思い込んでいました．その部分がこの授業で裏打ちされたものになり，うけて良かったと思いました．

・(生徒 D) 今だから記号を用いて三行ぐらいで解けるものを，記号を用いずに１０行以上使っていたところから，当たり前のように使っている座標もすごい発明なのかもと思い，斬新な考え方ができるようになった．

生徒Ａは幾何的表現と代数的表現の融合の有効性について以前より強く認識している．生徒Ｂやは『平面及び立体の軌跡論入門』の解釈を通して座標の価値付けをしている．座標を用いれば一次関数は明らかに直線であるということは自明であるけれどフェルマーはある代数方程式が直線となることをわざわざ証明していることに対して述べていると捉えられる．生徒Ｃは今回の授業を通して幾何的表現と代数的表現の融合についての有効性により強い価値付けをしている．生徒Ｄも座標にさらなる価値付けをおこなっている．

加えて『原論』を読んだ後，生徒Ａは「数学の基礎的な当たり前なことを学習していたのに，昔の人はとても難しく考えていた．別々の考え方（幾何と代数）を一つの考え方として融合してしまう発想はすごいと思った．この考え方で数学の世界は広がっていたに違いない」という感想を述べていた．恒等式を用いて捉えるとなんでもないことを，「原論」では幾何的な視点のみで考えていたことにより難しく捉えていたと解釈している．同時に幾何的表現と代数的表現の融合を価値づけている．以上の結果から次のことが言える．

> 当時の表現の解釈を通して，座標や代数的表現と幾何的表現の融合を価値あるものとして捉えている．

５．　おわりに

研究課題「一次文献を用いた授業が生徒の数学観の変容にどのような効果を及ぼしたか.」に対する答えは次のとおりである．

> 一次文献を用いた授業を通して生徒は幾何的表現と代数的表現の融合の有用性を再認識することができる．

本研究をとおして歴史的立場による生徒の数学観の変容の可能性が示唆されただろう．

謝辞

研究授業に際して、国立筑波大学附属高等学校の飯島忠先生、大野昭次先生、川崎宣昭先生、利根川誠先生、中田庸男先生、矢野一幸先生を始め、数学科の先生方には貴重な御意見、御指導をいただきました。深く御礼申し上げます。

註１）

本研究は、科学研究費、基盤研究Ｂ(2)展開研究（課題番号 10558032、研究代表者礒田正美）の一貫として行われた。

註２）

授業の詳細並びに資料等は次に掲示している。

http://130.158.186.11/mathedu/forAll/project/2000/index

参考文献

【１】 恩田洋一（1998）「一次文献を利用した数学史教育に関する一考察～「数学基礎」に関連して」筑波大学大学院教育研究科修士論文

【２】 礒田正美（1998）「関数領域のカリュキュラム開発の課題と展望」日本数学教育学会

【３】スチュワート・ホリングデール（1989）　「数学を築いた天才たち上」　講談社

【４】D.J.Struik(1969)　「A source Book in Math pp.143-150」 Cambridge, Mass. : Harvard University Press, 1969

【５】publiees par les soins de Paul Tannery et Charles Henry ; sous les auspices du Ministere de l'instruction publique (1989) 「OEUVRES DE FERMAT」pp.91-110　S.l. : s.n., 1989

【６】中村幸四郎・寺坂英孝・伊藤俊太郎・池田美恵（1971）「ユークリッド原論」　pp.39-40 共立出版株式会社

【７】ボイヤー（1984）　「数学史３」　pp.115-118　朝倉書店

【８】小杉肇（1984）　「数学史（幾何と空間）」　pp.164-191　槇書店

【９】文部省（平成 11 年）「高等学校学習指導要領解説　数学編　理数編」

【10】沖田和美（1995）「学校数学における数学史を生かした指導に関する一考察」平成 7 年度筑波大学大学院教育研究科修士論文

【11】神長幾子（1984）「高等学校における微分積分指導に関する一考察～微積分形成の歴史をふまえて～」昭和５９年度筑波大学大学院教育研究科修士論文

【12】E.H.カー（1997）「歴史とは何か」清水幾太郎訳　1962 年初版　pp.78 岩波新書

【13】薬師寺將二（1998）「解析の歴史的変遷を踏まえた曲線の探究に関する一考察～作図ツールの使用を前提に～」平成９年度筑波大学大学院教育研究科修士論文

【14】後藤司（1996）「曲線の表現史と作図ツールをふまえた解析幾何教材の刷新に関する一考察～ギリシャから微積分創成期をふまえて～」平成８年度筑波大学大学院教育研究科修士論文