

道具を利用した数学史学習による生徒の数学観の変容に関する一考察 ～ 角の三等分問題を通して ～

筑波大学大学院修士課程教育研究科
野口敬子

	要 約
1 . はじめに	
2 . 研究目的・研究方法	本稿は，数学指導に数学史を導入することによる，生徒の数学観の変容について考察するものである。ここではギリシア時代の三大問題の一つである角の三等分問題を取り上げ，数学を歴史的に捉えることと，三等分器という道具の機能・制約を理解することから生徒が数学を学ぶ意欲を持つことを検討した。その結果，生徒は数学を歴史的・発展的に捉え，道具の構造や公式の意味に興味を持ち，自分で考えることの楽しさ・重要性を再認識したことが示される。
3 . 授業概要	
3 . 1 教材の解説	
3 . 2 授業環境	
3 . 3 授業展開	
4 . 結果・考察	
5 . おわりに	

1 . はじめに

IEA(国際教育到達度評価学会)^[1]の調査から，我が国の児童・生徒の「数学嫌い」の増加を読み取ることができる。これに対して筆者は，数学を定理・公式の理解，応用と考える生徒が少なくないためではないかと考える。そして，生徒の数学観を変容させることが数学嫌いを減少させることにつながると考える。阿部・伊藤(1995)^[2]は，数学嫌いの増加問題を解決するために，生徒の数学に対する認識に何らかの影響を与えるような授業実践を考え，問題設定活動と情意的側面の変容に関する研究を行っている。数学に対する認識 - 数学観の改善は，従来から数学教育の課題とされてきた。磯田・阿部(1994)^[3]は，これに対し，表情からみた学習指導による数学観育成に関する研究を行っている。

筆者は，数学観の変容のためには数学を発展的に捉えることと，道具の機能・制約を理解することが必要だと考える。つまり，数学が生まれた当時の思考や道具の発明・構造などを取り上げていく中で，生徒は自分が学んでいる数学の位置付けを理解し，学ぶ価値を見出すと考える。

沖田(1995)^[4]は、生徒が数学を発展するものとして見るができるように、数学史を生かした指導を研究している。また、磯田(2000)^[5]は、数学史教材を取り上げ、道具のもつ社会歴史文化的な機能・制約とその反映の実際を研究している。しかし、それら双方の意図を含んだ研究はあまりない。

そこで本研究では、以上をふまえて、数学史を教材に用い、道具の機能・制約を理解することから数学を発展的に捉えられるか否か、また、そこから生徒が数学を学ぶ価値を見出すことができるか否かを明らかにする。

2 . 研究目的・研究方法

研究目的：数学史教材を、生徒自身に解釈・追体験させることにより、生徒は数学を発展的に捉えられるか否か、また、そこから数学を学ぶ価値を見出すことができるか否かを明らかにする。

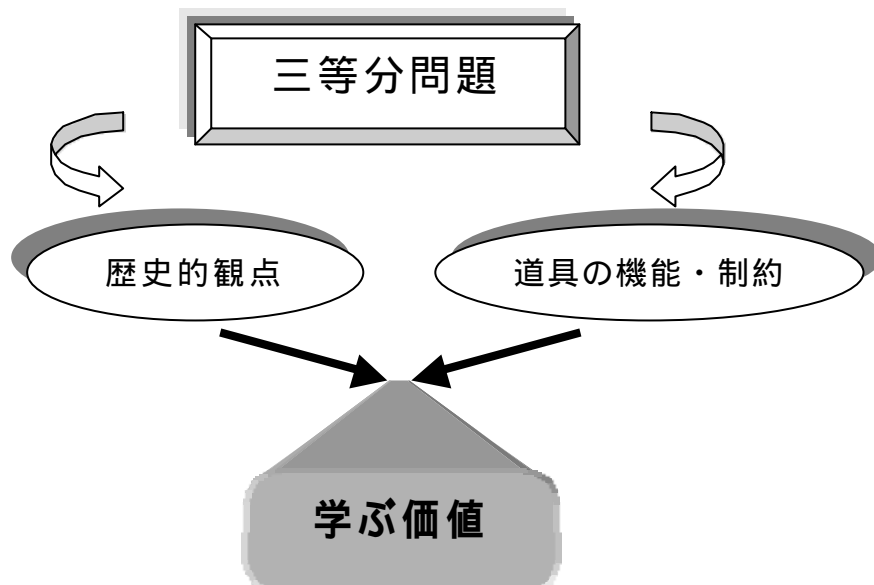
研究方法・・・上記の目的を達成するために、以下の課題を設定する。

課題 1：道具の構造を解釈することにより、道具が幾何学的推論を媒介することを理解できるか否かを明らかにする。

課題 2：道具が発明された過程、道具の利用によって数学が発展してきたことを理解できるか否かを明らかにする。

課題 3：課題 1, 2 から生徒が数学を学ぶ価値を見出すことができるか否かを明らかにする。

本研究では、授業前後のアンケートと授業毎の感想、また授業の様子を撮影したビデオにより、生徒の数学観の変容を調べる。



授業概要

3 - 1 教材の解説

原典として Greek mathematical Works (pp.308 - 363)^[6], Multi-Sensory Aids in the Teaching of Mathematics(pp.146 - 153)^[7]を用いた。前者により三大問題の歴史的流れや様々な解法を，後者により角の三等分器をそれぞれ導入した。

3 - 2 授業環境

(1) 対象：中学校3年生 1クラス(46名)

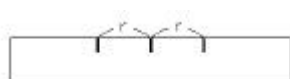
垂線，平行線，角の二等分線の作図は既習

(2) 準備：コンピュータ(Windows)，作図ツール(Cabri Geometry)，Microsoft Power Point，ビデオプロジェクター，事前アンケート，事後アンケート，ワークシート(授業の感想含む)，授業資料

3 - 3 授業展開

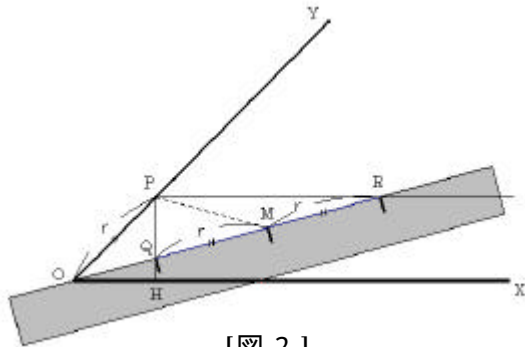
指導目標：ギリシア数学史における三大問題の一つである角の三等分問題とその解法を知ることにより，昔の人の考え方や道具の工夫の仕方を解釈させる。

角の三等分問題，角の三等分器の存在を知り，その構造を考える。



[図 1]

ギリシア数学史における三大問題の一つである角の三等分問題を紹介した後，角の三等分器の存在を紹介した。



[図 2]

GRIGIA MATHEMATICS
 Bib. n. 20 17, ed. Hoepli 274. 13 276. 14
 27. Αὐτοεπίστατος ἢν πάλιν ἐργάζεσθαι τὴν αὐτὴν ἀποδείξιν ἢν ἐπὶ τῷ ἀποδείξει αὐτῆς.
 *Ὅτι τὸ γὰρ ἄξιον ἐπιπέδου ἢ τῆς ΑΗΓ, καὶ τὸ δὲ
 αὐτὸν ἀποδείξει αὐτῆς ἢ ΑΗΓ, καὶ οὐκ ἔστιν ἄλλο
 ἀπὸ τῆς ΑΗΓ ἀποδείξει αὐτῆς ἢ ΑΗΓ ἀποδείξει αὐτῆς
 τὸ R καὶ παραλληλογραμμοῦ ὅπως ἀποδεικνύεται
 τοῦ ΓΖ κινῶντος μεταξὺ τῶν ΕΑΓ εὐθείας ἢ ΒΔ
 κινῶντος ἐπὶ τὸ R ἐπὶ τῆς ἀποδείξει τῆς ΑΒ (ὅτι τὸ
 γὰρ ἄξιον ἀποδείξει αὐτῆς ἀποδείξει αὐτῆς) ἄρα τὸ
 δὲ ἄξιον ἀποδείξει αὐτῆς τῆς ΑΗΓ ἀποδείξει αὐτῆς
 ἢ τῆς ΑΗΓ ἀποδείξει αὐτῆς ΕΒΓ

Ἐπιπέδου γὰρ ἢ ΕΒΓ ὅχι τῶν Η, καὶ ὅτι
 ἢ ΑΗΓ ἢ τῆς ΑΒ οἱ ΔΗ, ΗΑ, ΗΕ ἴσους
 ἀποδείξει αὐτῆς ΑΕ τῆς ΑΗ. ἀλλὰ καὶ τῆς ΑΒ ὅτι
 ἴσους ἀποδείξει αὐτῆς ΒΑ τῆς ΑΗ, καὶ ὅτι ΑΒΔ
 τῆς ΑΗΑ. ἢ δὲ τῆς ΑΗΑ ἀποδείξει αὐτῆς ἀπὸ
 ΑΒΑ, ἀποδείξει αὐτῆς ἀπὸ ΑΒΓ, καὶ ὅτι ΑΒΑ
 ἀπὸ ΑΒΑ ἀποδείξει αὐτῆς ἀπὸ ΑΒΓ, καὶ ἴσους ἀπὸ
 ΑΒΔ ὅχι ἀποδείξει αὐτῆς ἀπὸ ΑΒΓ ἀποδείξει αὐτῆς

[図 3] (ギリシア語)

Greek mathematical Works

SPECIAL PROBLEMS
 27. With this instrument, the given arbitrary angle is trisected in the following manner.
 Erect the line AH to an acute angle, and from any point [of the straight line AH] let the perpendicular PQ be drawn, and let the parallelogram PQRS be completed, and let RA be produced to E, and construct the right-angled parallelogram RQED, let the straight line ED be bisected by M, AC be drawn towards A, and be equal to twice AM—that this is possible has been proved above. Let the angle EAC be a third part of the given angle AOB.

Let ED be bisected in M, and let AD be joined; the three straight lines AD, HA, HE will therefore equal; therefore AE is double of HA. But HA is double of AC; therefore BA is equal to AC, and the angle AAB is equal to ABE. Now AHA is double of ABA, that is, of ABE; and therefore AHA is double of ABE. And if we bisect ABE, the angle ABE will be trisected.

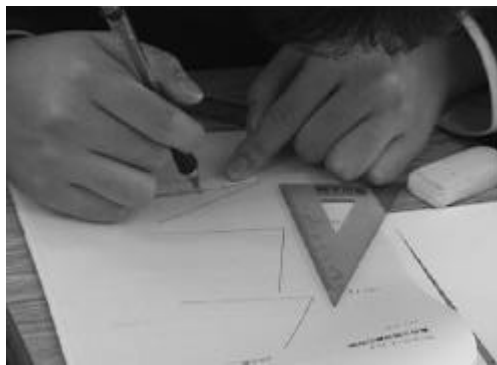
[図 4] (英語訳)

Greek mathematical Works



[写真 1] 構造の証明

三等分器[図 1]の使い方を示し, その幾何学的構造[図 2]を穴埋め形式のワークシートを用いて証明させた。[写真 1]



[写真 2] 三等分線の作図

次に, 原典[図 3, 図 4]を紹介し, 道具を発明した人は自分たちが証明したことを逆から考えて道具を発明したことを理解させた。ギリシア語の原典と英語訳の文章を見て, 生徒たちは感動を声に出して表現していた。

次に, 三等分器で実際に角の三等分線を描くことによって, 三等分問題の追体験をさせた。[写真 2]

次に, 三等分器の構造を証明したことによって, 道具が幾何学的推論を媒介していることを理解させた。

【T: 授業者, S: 生徒】

T: 「三等分器の構造を証明するときに, どんな図形の性質を使ったかな?」

S1: 「円周角の定理。」

T: 「そうだね。他にもあるかな?」

S2 : 「二等辺三角形の底角...。」

T : 「二等辺三角形の底角は等しいという性質を使ったね。他には？」

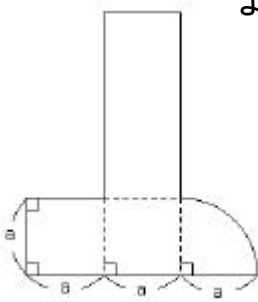
S3 : 「三角形の内角と外角。」

T : 「三角形の外角が出てきたね。他には？」

沈黙

T : 「このように、道具はもともと知られていた作図方法や図形の性質を使って発明されたんだね。」

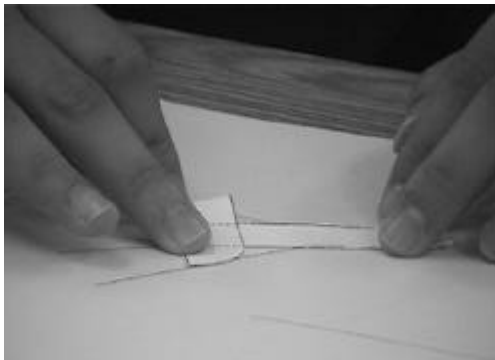
他の三等分器の使い方を考え、実際に三等分線を描くことにより、三等分問題の追体験をする(グループ活動)。



[図 5]



[写真 3] 三等分器の使い方を考える



[写真 4] 使い方

画用紙に印刷した図[図 5]をはさみで切らせ、三等分器を作らせた。そして、その使い方をグループで考えさせた。

[補助線の必要性]

[道具の向き]

[3点を合わせる]

という順でヒントを出していった。

『エピソード 1』

S1 : 「あっ、多分こうだ。」

S2 : 「絶対違うよ。この突起物が何か関係あるんだよ。」

『エピソード 2』

S3 : 「こうじゃない？」

S4 : 「だって、この丸いの意味ないじゃん。」

生徒たちは三等分器の円弧の部分に関心があるようだった。

『エピソード 3』 [写真 5] [写真 6]

SA : 「ここが接して、ここも接して、この頂点を使うと三等分できるよ。」

SB : 「んー？どこが接してるの？」

SA : 「この円と、ここと、ここ。」



[写真5] AはBに教える

SB : 「本当だ。これで三等分できてるの？」

SA : 「ここと、ここと、この頂点だよ。」

SB : 「ほおーっ。わかったー！」

SC : 「理解できねえ〜。」

SB : 「教えてあげようか。」

SC : 「ありがとう。」

SB : 「ここと、ここと、ここが接していればいいらしいから、これでいいらしいよ。」
(不正解)

SC : 「このラインはどこに接してるの？」

SB : 「ここなんじゃないの？あっ、こうだ。」
(正解)

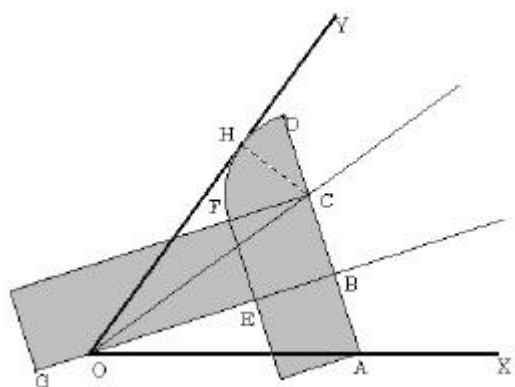


[写真6] BはCに教える

時間を見て黒板に正解を提示し,三等分線の作図に移った。その際,「なぜこのように使うと三等分線が描けるのかを考えながら描くこと」を注意した。

次に,昔の人が角の三等分をしたかった理由は,正九(又は九の倍数)角形を作図したかったからだ(T.L.ヒース(1998)「復刻版ギリシア数学史」共立出版より^[8]ということを伝え,必要性を認識させた。

自分たちで使い方を考えた三等分器の幾何学的構造を証明する。



[図6]

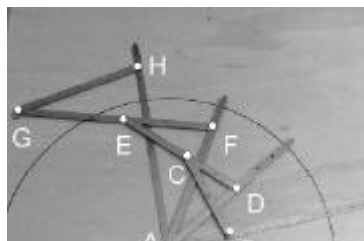
穴埋め形式のワークシートを用いて三等分器の幾何学的構造を証明させた。

[図6][写真7]

自分が考えた使い方を自分で証明することにより,使い方を考えたことの意義や証明をすることの意義の理解を期待した。

ここでも,もともと知られていた図形の性質や作図方法を使うことによって道具が発明されたことを理解させた。

その他の角の三等分器を知り,その幾何学的構造を理解する。



三角形の外角,二等辺三角形の性質を使用した三等分器・図形の相似の性質を使用した三等分器・ひし形の性質を使用した三等分器を紹介し,その構造を説明した。構造が簡単のため,生徒たちは理解している様子であった。

4 . 結果・考察

課題1 : 道具の構造を解釈することにより,道具が幾何学的推論を媒介することを理解できるか否かを明らかにする。

事前・事後アンケートより

Q . 数学をするときにどんなものを使いますか。

A . 作図道具(筆記用具を除く)を記述した生徒

事前 15 名(33.3%) 事後 22 名(50.0%)

このうち,事後で初めて作図道具を記述した生徒は 11 名
(約 25.0%)

授業感想より

Q . 三等分器についての感想を書いてください。(発明されたことや,構造など)

A .(一部)

- ・ いろんな性質を使っていておもしろい。
- ・ 三等分器に存在する線の 1 本 1 本がとても重要だとわかる。
- ・ 自分たちが何気なく使っている分度器だけど,その分度器にもいろいろな過程があることを知れた。

事後アンケートより

Q . この授業を通して,あなたが変わったなぁと思うことを自

由に書いてください。

A.(一部)

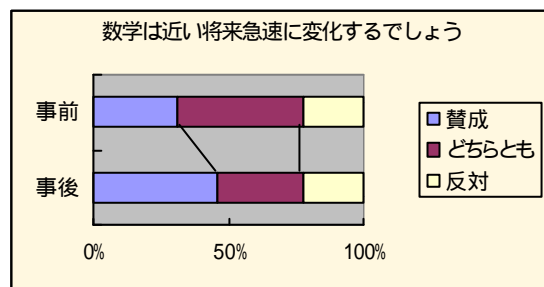
- ・ いろいろな道具の法則を自分でみつけようとするようになった。
- ・ 図形を作る道具はコンパス，定規，分度器といった物だと思っていたが，必要に応じて様々な道具ができることが分かった。
- ・ 普段使っている三角定規も分度器も，数学的に発明されているということがわかった。

より，生徒は数学を学習するときの作図道具の必要性を再認識したと言える。また，より，作図道具はコンパス，定規，分度器などに限られると考えていたが，必要に応じた道具ができることを理解したことがわかる。また，自分たちが何気なく使っている作図道具も数学的に発明されていることを理解し，更に自ら道具の法則を見つけようという意欲を生み出すことができたことがわかる。

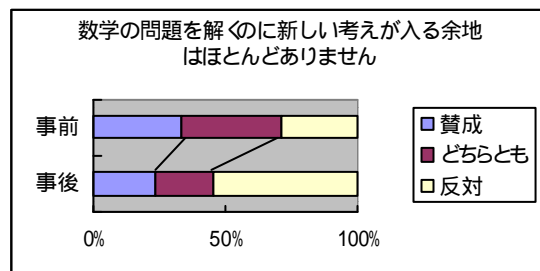
課題 2：道具が発明された過程，道具の使用によって数学が発展してきたことを理解できるか否かを明らかにする。

事前・事後アンケートより

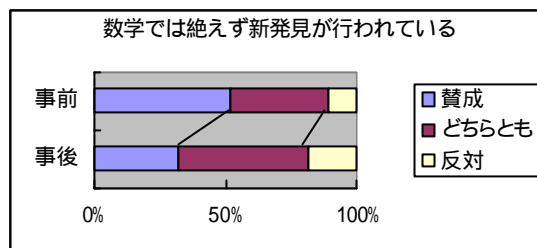
数学は近い将来急速に変化するでしょう			
	賛成	どちらとも	反対
事前	14(31.1%)	20(44.4%)	10(22.2%)
事後	20(45.5%)	14(31.8%)	10(22.7%)



数学の問題を解くのに新しい考えが入る余地はほとんどありません			
	賛成	どちらとも	反対
事前	15(33.3%)	16(35.6%)	13(28.9%)
事後	10(22.7%)	10(22.7%)	24(54.5%)



数学では絶えず新発見が行われている			
	賛成	どちらとも	反対
事前	14(31.1%)	21(46.7%)	8(17.8%)
事後	24(54.5%)	15(34.1%)	5(11.4%)



授業感想より

Q. 三等分器についての感想を書いてください。(発明されたことや、構造など)

A.(一部)

- ・ 角の三等分ができるようになって、正九角形などが描けるようになった。
- ・ 角の三等分器が発明されたことによって今の数学ができあがっていった。
- ・ 三等分器は今の数学にとって役に立つもの。
- ・ 身近にあるもので、いろんな考え方ができる。これを利用してまた新たな発見がされる。
- ・ 9又は9の倍数の正多角形が描けるようになった。
- ・ 三等分線を描けるようになったことで正九角形も描けるようになる。このことをまた応用していろんなものを描けたり、発明できるようになることは、これから進んでいく社会にとって、とても大切なことだと思う。

事後アンケートより

Q. この授業を通して、あなたが変わったなあと思うことを自由に書いてください。

A.(一部)

- ・ 数学というものはずっと前からいろいろな人が苦労して作ってきたものだということを知った。
- ・ 数学が進歩してきたことに少しだけ興味が出た。
- ・ 今まで習ってきたものが生み出されてきた時代の背景を知って、数学に対する思いが変わった。
- ・ 昔の人の気分を味わった。そして昔のことを考えるようになった。
- ・ 数学がずっと昔からあったと聞いてすごいなと思った。

- ・今の数学は、昔の人の考えをまとめた努力の結晶だと思った。数学の第一歩からわかって楽しかった。
- ・数学にはいろんな人がからんでいるんだなぁと思った。
- ・普段ふつうにやっている数学にはこんな歴史があるんだなぁと思った。昔の人は問題を解くのに大変な思いをしたんだと思った。
- ・昔のギリシア人が出てきて、数学の本当の始まったところ、どのようなことをしていたのかを知ることができ、今やっている数学はよくわからない内容ばかりだけど、そういうものもこういう歴史があるんだと思い、数学がほんの少し身近に感じた気がした。
- ・数学はもっと最近発展してきたものだと思っていたが、今から2000年以上も前からこんな問題を解こうとしていた学者がいたことを知り、数学には歴史があるんだなぁと思った。

より、生徒は今まで数学を断片的に捉えていたが、これから発展していくと考え始めた傾向にあることがわかる。

、より生徒は数学の歴史を学ぶことによって今自分が学んでいる数学の位置付けを理解したことがわかる。また、これから発展していく社会に数学を結びつけている意見も出ている。数学を発展的に捉えられていることがわかる。

以上より、生徒は過去の数学、現在の数学、未来の数学を結びつけて考えられるようになったと考えてよいのではないだろうか。

課題3：課題1, 2から生徒が数学を学ぶ価値を見出すことができるか否かを明らかにする

事後アンケートより

Q.この授業を通してあなたが変わったなぁと思うことを自由に書いてください。

A.(一部)

- ・証明を自分の力でやろうと思うようになった。
- ・いろいろな道具の法則を自分で見つけようとするようになった。
- ・図形の構造を前より読み取ることができるようになった。
- ・数学はただ解き方を覚えてひたすら解くものだと思っていたけ

ど、このように自分でよく考えて解き方を見つけていくものだと思った。

- ・ いろいろな描き方がわかったのでこれからは覚えた方法で三分線を描けると思う。証明することは大事だとわかった。これからは何事も証明を大事に。
- ・ どんな問題でも自分で解けるんだなぁと思いました。感動。
- ・ 数学は型にはまって考えるものだと思っていたが、広い目で見わたして考え方を広げさまざまなところからアイディアを持ってきて答えを追い求めるものだと思った。
- ・ 数学は公式だけを覚えていたけど、公式の理由、公式がなぜできたかに少し興味を持てた。
- ・ 数学が少しおもしろくなりました。自分で考えたり道具を使って作図したりするのが楽しく感じられました。
- ・ 現在は分度器などの便利な道具ができていたので、気づかなかった昔の数学を知って、公式だけが数学じゃないと思えるようになりました。
- ・ 先生に全部答えを教えてもらうのではなくて、自分で使い方を考えるのもちょっとはおもしろいと思った。

生徒は道具の機能・制約を理解することにより、数学と聞いてすぐに思い浮かぶ公式の意味に興味を持つようになった。また、この授業では生徒の追体験を重視したため、「自分で考える」ということの楽しさ、重要さを再認識した生徒が多かった。更に、数学を広い目で見ようとする意見も出た。以上より、生徒は自ら数学を学ぶ価値を見出すことができたと言っただろう。

3. おわりに

この研究では、数学史を教材に用い、道具の機能・制約を理解することから数学を発展的に捉えられるか否か、また、そこから生徒が数学を学ぶ価値を見出すことができるか否かを考えてきた。その結果、生徒は必要に応じた道具が数学的に発明されていることを理解し、更に自ら道具の法則を見つけようという意欲を持った。また、数学の歴史を学ぶことによ

って、今自分が学んでいる数学の位置付けを理解し、これから発展していく社会に数学を結びつけるなど、数学を発展的に捉えられたことがわかった。そして、数学を広い目で見て、自ら考えようとする態度が生まれてきたことがわかった。

「数学嫌い」の生徒が増加する中、学ぶ意欲を持たせることが必要である。そのために、生徒自身に学んでいる数学の位置付けを理解させることと、普段何気なく使っている道具の機能・制約を理解させることはとても重要であると言える。

謝辞

研究授業の実施に際して、私立茗溪学園の島一史先生、鈴木誠先生をはじめ、数学科の先生方に貴重なご意見、ご協力をいただきました。厚く御礼申し上げます。

註 1

本研究は、科学研究費、基盤研究 B(2)展開研究(課題番号 10558032、研究代表者 磯田正美)の一貫として行われた。

註 2

授業の詳細並びに資料等は次に掲示している。

<http://130.158.186.11/mathedu/forAll/project/2000/index>

参考文献

- 【 1 】 国立教育研究所紀要 第 126 集「小・中学生の算数・数学、理科の成績」
- 第 3 回国際数学・理科教育調査国内中間報告書 - (1996)国立教育研究所
pp.83 - 90
国立教育研究所紀要 第 128 集「小学校の算数教育・理科教育の国際比較」
- 第 3 回国際数学・理科教育調査最終報告書 - (1998)国立教育研究所
pp.106 - 120
- 【 2 】 阿部裕・伊藤道男(1995)「問題設定活動と情意的側面の変容に関する一考察 - 情意的側面を『みとる』枠組みの開発を軸として - 」日本数学教育学会誌 第 77 巻 第 9 号 pp.13 - 21
- 【 3 】 磯田正美・阿部裕(1994)「表情からみた学習指導による数学観育成に関する一考察 - 授業への参加形態としての認めあう活動と、個の欲求、自己表現 - 」日本数学教育学会誌 第 76 巻 第 11 号 pp.12 - 21

- 【 4 】沖田和美(1996)「学校数学における数学史を生かした指導に関する一考察」
平成 7 年度筑波大学大学院教育研究科修士論文
- 【 5 】磯田正美(2000)「手段としての教具から媒介としての道具への教具観の転換に関する一考察 - 数学史上の道具の機能・制約とのその反映に関する検討 - 」第 33 回数学教育論文発表会論文集, 日本数学教育学会 pp.193 - 198
- 【 6 】Ivor Thomas(1939)「GREEK MATHEMATICAL WORKS」Harvard University pp.256 - 363
- 【 7 】National Council of Teachers of Mathematics(1966)「Multi-Sensory Aids in the Teaching of Mathematics」New York : AMS Reprint, 1966 pp.146 - 153
- 【 8 】T.L.ヒース(1998)「復刻版ギリシア数学史」共立出版 pp.114 - 126
- 【 9 】スチュアート・ホリングテール(1993)「数学を築いた天才たち④」講談社 pp.29 - 34 , pp.45 - 54
- 【 10 】磯田正美(1999)「数学の弁証法的発展とその適用に関する一考察 - 『表現の再構成過程』再考 - 」筑波数学教育研究第 18 号 pp.11 - 20
- 【 11 】伊藤圭子(1995)「数学教育における質的研究について：その前提と方法」日本数学教育学会誌 第 77 巻 第 9 号 pp.2 - 11
- 【 12 】恩田洋一(1999)「一次文献を利用した数学史教育に関する一考察 - 『数学基礎』に関連して - 」平成 10 年度筑波大学大学院教育研究科修士論文
- 【 13 】関口靖広(1997)「認知と文化：数学教育研究の新しい方向」日本数学教育学会誌 第 79 巻 第 5 号 pp.14 - 23
- 【 14 】Hans Niels Jahnke「The Historical Dimension of Mathematical Understanding - Objectifying the subjective」Proceeding of PME-18, Portugal, Vol.1 pp.139 - 156

参考 URL

- 【 1 】筑波大学数学教育研究室 代数・幾何・微積 For All プロジェクト
<http://130.158.186.11/mathedu/forAll/index.html>
- 【 2 】MATHEMATICAL LABORATORY
<http://155.185.1.61/labmat/usa1.htm>