

数学史上の測量問題を通じた生徒の数学観の変容に関する一考察 - 数学のよさを見直す立場から -

筑波大学大学院修士課程教育研究科

藁科 由紀美

- | | | |
|---------|------------|--|
| 1 . | はじめに | 要約 |
| 2 . | 研究授業の目的・方法 | 本研究では、『九章算術』『塵劫記』『ヘロンの公式』を題材として、その当時の数学の様相を知ることによって生徒がこれまで捉えていた数学の認識を確認し、それらを再構成できるか否かを考察した。その過程では、測量問題の追体験を行い、歴史文化的背景も含め、授業を展開した。分析した結果、歴史文化的視野における生徒の数学観の変容が見られた。それらは数学そのものを捉え直すきっかけとなり、数学のよさを感じる一因になったと考えられる。 |
| 3 . | 授業概要 | |
| 3 - 1 . | 対象 | |
| 3 - 2 . | 準備 | |
| 3 - 3 . | 授業目標 | |
| 3 - 4 . | 教材の解説 | |
| 3 - 5 . | 授業展開 | |
| 4 . | 結果と考察 | |
| 5 . | おわりに | |

1 . はじめに

2003年度より学習指導要領の改訂で高等学校に「数学基礎」が新設され、数学史が導入される。その点に関して筆者は、「数学学習の過程を、数学創造の過程の追体験の場として構成するために数学史を利用しようとする立場である」磯田(1987)¹と「オリジナルな題材の研究は歴史と数学を教えることを結びつける方法として、もっとも発展性のある方法で、生徒に価値のあることである。」Jahnke(2000)²の視点から考察する。よって、お話的な授業で終わらないよう、数学における基本的な概念を深め、数学的見方・考え方のよさを生徒自身が考え、実際に追体験し、解釈することが必要となる。そのために、今回の研究では、当時の実際に行った解法、数学の知識・技能・考え方の点も含め、社会歴史文化的視野で生徒に数学を感じてもらうことを目指す。文化の捉え方に関しては関口

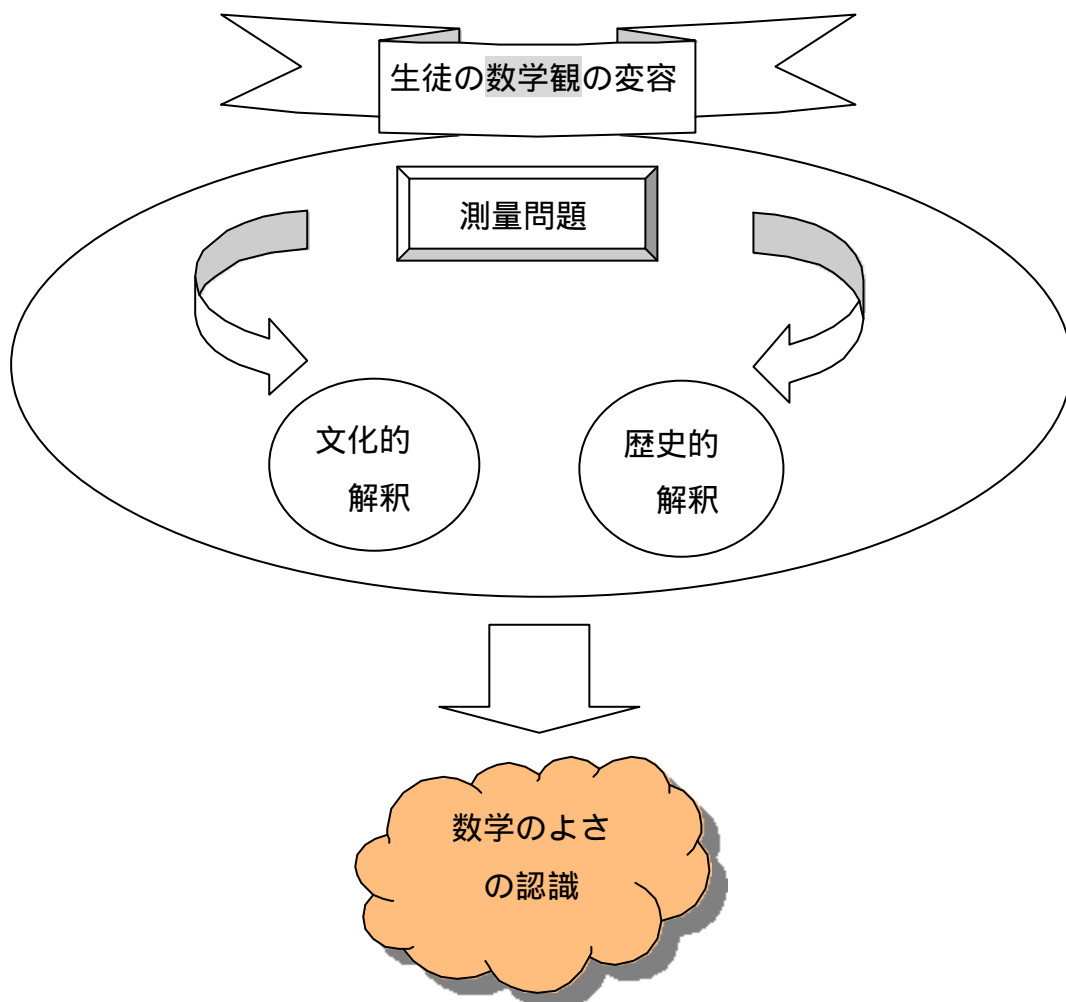
¹ 磯田正美(1987)。「数学学習における数学史の利用に関する一考察」
筑波大学附属駒場中・高等学校研究報告 第26集

² J. Fauvel, J. V. Maanen(2000)。「History in Mathematics Education」

(1997)³の研究がある。また、「数学を固定的なものとして、発展的に考えようとする態度が見られない(IEA 国際調査)をふまえ、子供の数学に対する見方を変える為に、子供が学ぶ数学は歴史上で形成されてきたものとして正しく理解する必要がある」沖田(1995)⁴の研究に立脚し、「数学基礎」の目標である「数学と人間の活動」「社会生活における数理的な考察」⁵より、生徒が数学の認識を改めるような授業展開をし、そして、数学を人間の営みを通して構成されてきたものとして、数学を再構成できるか否かを考察する。

2. 研究目的

数学史を活用した学習から、歴史・文化としての数学観についての生徒の数学の認識と再構成を考察する



³ 関口靖広(1997) 認知と文化：数学教育研究の新しい方向
日本数学教育学会誌 第79巻 第5号

⁴ 沖田和美(1995).「学校数学における数学史を生かした指導に関する一考察」
平成7年度筑波大学大学院教育研究科修士論文

⁵ 文部省(1999).「高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編」, pp31 - 33

課題 1

- 1 - 1 . 測量問題の追体験を通して、数学と実生活との関係の捉え方の変容をみる。
- 1 - 2 . 測量問題の追体験を通して、数学と歴史との関係の捉え方の変容をみる。

課題 2 課題 1 より、当時の数学の考察を通して、数学的な見方・考え方のよさが認識できたか否かを考察する。

本研究では、以下の方法をとる
授業実践を行い、授業観察と事前・事後のアンケートを実施する。
そして、授業観察で記録したビデオと、授業で使用したワークシートの記述とアンケートに基づいた考察を行う。

3 . 授業概要

3 - 1 . 対象 中学 3 年生 より 1 クラス (4 5 名)
(三角比は既習)

3 - 2 . 準備 ;

コンピュータ (Windows)、Microsoft Power Point、
ビデオプロジェクター、事前アンケート、事後アンケート、
ワークシート (授業の感想含む)、授業資料

3 - 3 . 授業目標 :

『九章算術』『塵劫記』『ヘロンの公式』を題材として、その当時の数学の様相を知る

3 - 4 . 教材の解説

本研究では原典として『九章算術』『塵劫記』『Greek Mathematics Works』を用いた。「原典は、それが書かれた時代と考えの前後関係について詳しく、深く理解する必要がある」Jahnke (2000)⁶より、求積法の起源に焦点をあて、測量問題を 1 つの場面として捉え、追体験させた。また、「数学の歴史の背景から数学の本質を考えることは、個人と社会の中の数学的知識の発展の認識論的問題を創造する方法を変化させる」Jahnke (2000)⁷ために数学と文化について考えさせる。

⁶ 前掲、2 .

⁷ 前掲、2 .

中国、日本、ギリシャの三つの国の三つ時代の測量問題を探求することによって、研究目的を考察できると考える。

3 - 5 . 授業展開

【『九章算術』を題材とした 2000 年前の中国における測量の探究】(1 時間目)

(1) 授業内容の提示・資料配布・場面設定

3 時間で測量問題を解釈していく。『九章算術』と『塵劫記』は同じ授業展開 をする。今日は『九章算術』の測量問題を探求する。スクリーンと資料で 2000 年前の中国を示し、『九章算術』とはこういった書物なのか? を理解する。当時の面積の長さや大きさの単位について理解する。

(2) 当時の測量

(1) をふまえて当時の測量について考えよう。

社会的背景 (官僚の実務としての必要性など) を理解する。

(3) 問題の提示 『九章算術』の問題を、自分なりに考えて、解いてみよう。

< 写真 1 >



問題例 二五

いま圭田がある。広は一二歩、正縦は二十一歩である。面積はいくらか (巻第一 方田)

【原典】

(4) 生徒の反応

生徒のほとんどは“ 簡単 ” という感想を抱いたようだが、生徒全員が

代数記号を用いた解法をした。

そこで、黒板に出て書いてもらった生徒の記述を確認する。写真2
代数記号で当時は解いていたのか？

『九章算術』の解法について確認する。

解法例 二五

答えにいう、百二十六歩

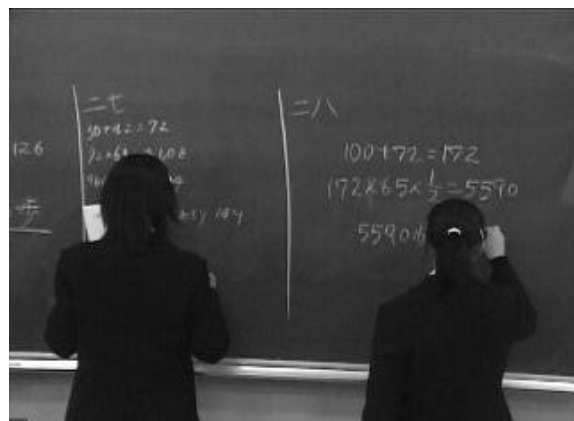
圭田。術にいう、広を半分にし、それを正縦に掛ける。

(巻第一 方田)

原典、日本語訳を探究しよう。



<写真1>



<写真2>

(5) 生徒の反応 T: 授業者、S: 生徒

T: 「数学と文化について考えるために、2000年前の中国の数学について考えよう。」

S1: 「歩で数えていくのがおもしろい。畝とか不思議な単位だな。数学なのに漢字が多いな。」

S2: 「古代の人も式を考えて数学をしていたんだと思うとわくわくした。人間てやっぱり頭がいい。」

S3: 「中国の数学は難しい。そこから進歩して今のようにわかりやすくなったのかと思うとありがたいなあと思う。」

S4: 「いろいろ新しいことを学んだ気がする。2000年前の中国で書かれた内容に、今の私たちが解いているような問題があってびっくりした。」

【『塵劫記』を題材とした江戸時代の日本における測量の探究】

(2 時間目)

(1) 場面設定

今日は『塵劫記』の測量問題を探求する。

昨日と同様の展開をする。はじめに昨日の復習から入る。

次に、スクリーンと資料で江戸時代の日本を示す。

『塵劫記』という書物を理解する。

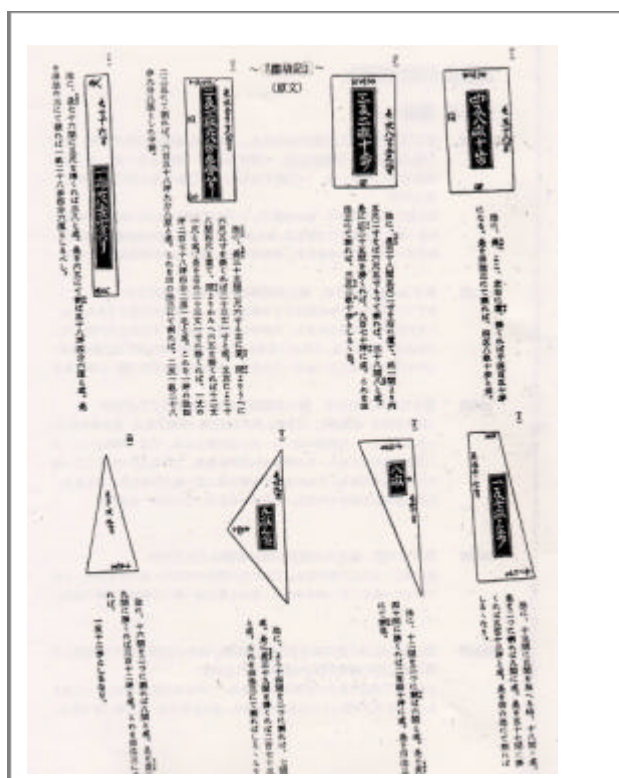
当時の面積の長さや大きさの単位について理解する。

(2) 当時の測量

(1) をふまえて当時の測量について考えよう。

社会的背景 (吉田光由、代官の役目、当時の検地、年貢と田畑の関係など) を理解する。

(3) 問題の提示 『塵劫記』の問題を、自分なりに考えて、解いてみよう。



【原典】

問題例

第四問

長さ七六間、幅五尺の矩形の田の面積はどれだけか

(第二三 検地)

(4) 生徒の反応

生徒のほとんどは解答しながら「難しい」を連発していた。そこで「回りの人と話し合ってもよい」と発したところ、生徒同士で議論していたよう

だ。〈写真3〉

次に、ランダムにあてて黒板に解答してもらったところ、全員が代数記号を用いた解法をした。

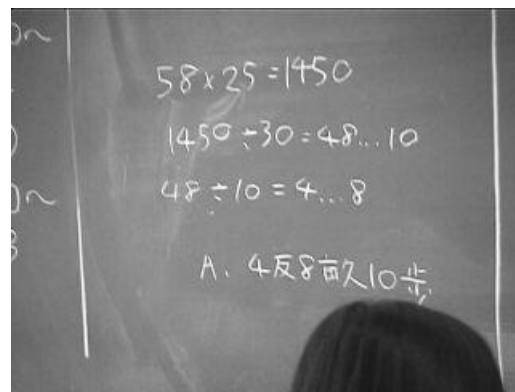
そこで、黒板に出て書いてもらった生徒の記述を確認する。

〈写真4〉



生徒同士の話し合い

〈写真3〉



生徒の解答例

〈写真4〉

代数記号で当時は解いていたのか？

『塵劫記』の解法について確認する。

解法例 第四問

五尺は〇・七六九二間である。これに七六間をかけ五八・四六坪を得る。これで割って一余り二八・四六を得る。求める答えは一畝二八歩四分六厘である。

(第二三 検地)

原典、現代語訳を探究しよう。

(5) 生徒の反応

T : 「数学と文化について考えるために、『九章算術』と『塵劫記』の解法を比較してみよう。」

S1 : 「今日は昨日より単位がいっぱいあって大変だった。」

S2 : 「計算が複雑で難しい。昔の人はよく頑張ったですね。」

S3 : 「『塵劫記』のほうが難しい。今のやり方のほうが簡単。」

【『ヘロンの“測量術”』を題材とした 2000 年前のギリシャ時代における測量の探究と公式の発見】 (3 時間目)

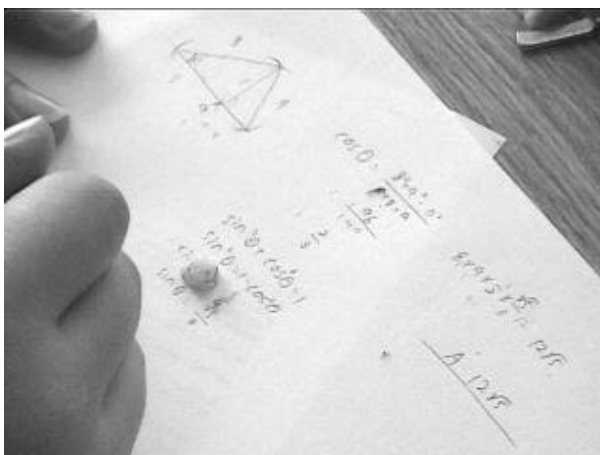
(1) 場面設定

ヘロンはどんな人なのかを理解する。

スクリーンと資料で 2000 年前のギリシャを示す。

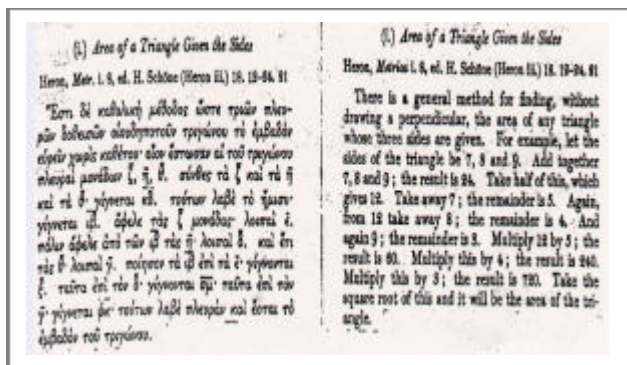
(2) 問題の提示 三辺が 7, 8, 9 の三角形の面積を求めよう。

(3) 生徒の解法



- 余弦定理を用いて面積を求めた生徒 - 2 名
 - 高さを求めてから面積を求めた生徒 - 7 名
 - 無回答 - 1 名
- それ以外の解法をした生徒はいなかった

(4) ヘロンの解法



【原典】

原文と日本語訳を参照しよう。
そして実際に記述しよう。
自分の解法と比較してみよう。

(5) 当時の測量

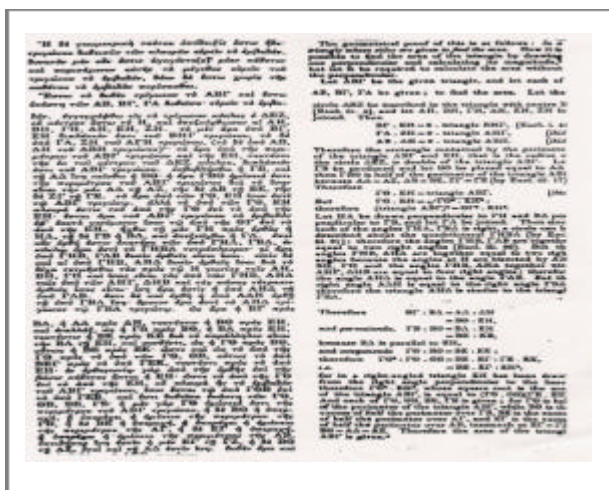
『測量術』という書物を理解する。

『測量術』におけるヘロンの公式の部分を理解する。(歓声)

では、こういった規則の実際的な応用を考えよう。

幾何学の起源、三角形の面積を測るための実用的規則の広がりなどを理解する。

(6) ヘロンの証明の紹介



現在では、三角比を用いて証明するが、ヘロンは幾何的に、エレガントに証明した。

各自、原文、日本語訳で探求しよう。

【原典】

(7) 生徒の反応

- S 1 : 「余弦定理よりもヘロンの公式のほうが使いやすい」
- S 2 : 「ヘロンはめんどーなことだけど、すごいことをしたなー」
- S 3 : 「ヘロンの公式を使えば余弦定理を使わなくても面積が求められるということが一番印象に残りました」
- S 4 : 「3角形!!(ヘロン) 3辺がわかれば面積わかる！」
- S 5 : 「ヘロンの証明がすごいと思った。3辺の長さを与えられただけでその面積が求められるのも。」

4. 結果と考察

事後アンケートによる 「この授業を通してあなたが変わったなあとと思うところを自由に書いて下さい」 「どのようなことがきっかけで のように変わりましたか？」というアンケート結果より課題1・課題2について考察する。

[の結果は()の中]

課題1 - 1 .[測量問題の迫体験を通して、数学と実生活との関係の捉え方の変容をみる。]について：

- ・ 数学はふだんの生活にも使えるようになった(土地の計算など)
 - ・ 日常生活にはあまり使わないと思っていたけど、昔はいろんなことを数学で求めていたんだと変わった(この研究授業で)
 - ・ 「数学」っていわれると、“ただ難しくて、たいして意味もないもの” っていう風に考えていたけど、この3日間でならったことを思い出すと、実生活で使うことも時としてあるんだ、・・・となって少し“必要なもの” な気がしてきた
- (今まで生活で使うのはお金のちょっとした計算のみだと思っていたけど、土地などを考え

る時も使うということ)

- ・いろいろなれきし背景があっっておもしろいと思った。数学は普段の生活からでてきたんだなと思った
- ・ 数学は、ただ単に問題を解いたりするだけで、身の回りには関係ないと思っていたけど、昔、土地の面積を知りたかったとかで使っていたのを知って、結構、身の回りで役に立つことだと変わった(昔の数学について学んで変わった)

これより3日間を通して、数学を非日常的と捉えていた生徒も、日常生活に必要なもの、また日常生活と関わってきたもの、というように変容したといえる。日常生活に関係ないと捉えた生徒も数名いたが、ほとんどの生徒が数学を日常的なものであるという考えに変容したと考えられる。

課題1 - 2 .[測量問題の追体験を通して、数学と歴史との関係の捉え方の変容をみる。] について：

- ・ 数学についてたいして歴史なんかないと思っていたけど、歴史があることを知ったことが変わった(この授業がきっかけ)
- ・ 昔の数学がどういうものだったかというのを知った(今回、実際に問題を解いて)
- ・ 数学には長い歴史があると思った(ずっと前から数学は研究されていて今とは違う単位、解き方だなと思った)
- ・ 昔の人はすごい。昔から数学というものは考えられていた(ヘロンの公式)
- ・ 数学がこんな昔からあるとは知らなかった。昔の人は頭がいいんだなぁと思った(授業を受けて)

これより、数学を歴史とは関係ない、最近できたものと捉えていた生徒も、数学を歴史的視野の中で位置付けて捉えたと思われる。また、昔数学があったということ、そしてその昔の数学がどのようなものだったのかをはじめて知ったという生徒がほとんどであった。

次に課題2 [課題1より、当時の数学の考察を通して、数学的な見方・考え方のよさが認識できたか否かを考察する。] について考察する：

- ・ 数学について難しいものと思っていたが、もっと奥が深く、難しいものなんだと変わった。日常的なことにもいろいろ関わってきたものが数学であり、今まではあまり必要ないものだと思っていたが、本当は奥が深いものなんだなぁと思った(今やっていた数学というものは、誰かが勝手に作ってやっていたものだと思っていた。例えば公式とか、いろいろな

ものとか・・・。でも、この授業を受けてから、日常のいろんなものから数学というのは発展してきたんだなと思った。1日目の「九章算術」なんかは、もうほとんどが日常からきていて、できてきたやつだからのところがきっかけでこういう考え方になった)

- ・ 数学に対しての視線が変わりました。語学のように歴史があったなんてしりませんでした。難しかったけど、いろいろ知らないことが学べておもしろかったです(中国のかなり古い数学というところであゝ歴史があったのか・・・みたいな感じ)
- ・ 数学について、何で勉強するのか、あまり必要ないのではと思っていたけれど、数学にも歴史があって今までに至るまでのことを知って考え方が変わった(数学は普通に生活していく中で足し算、引き算、割り算、掛け算ぐらいがわかればいい、と思っていたけど、昔は実生活の中で数学はとても重要な役割をしていたことを知ったから)
- ・ 今の数学の公式は昔のいろいろな国の人の知識でできてきたんだなあ。数学について公式を覚えると解けるという考え方もあったけど、昔の歴史をたどって、どのようにしてつくられたのか、と考えるのもいいなあ。そしていろいろな考え方があるんだなあ。(「塵劫記」「九章算術」では、今は簡単な単位となって普通に計算しているけど昔の計算を実際にやってみて、こんなやり方をしていたんだなあと思った。ヘロンの考えにかんしん！今までは3角比によってがんばって、求めていたから。公式では簡単にかいてあったけど、その道のりは難しそうだった。)

これより、課題1に対する生徒の数学観の変容が読み取れると同時に、課題2に対しては、肯定的な結果であるといえる。さらに、「この授業で印象に残ったことは何ですか？」というアンケート結果より；

- ・ 昔の方法で昔の問題を解いたこと
- ・ 当時のその土地の測量の様子が見られたこと
- ・ 昔は単位の考え方がむずい。今はかんがえやすいのでちょっと lucky な気分です。でも昔の人はこの単位を普通に使っていたのだからスゴイと思う
- ・ 数学にも歴史があり、昔は今よりもずっと生活に必要なものだったんだと思いました
- ・ 日本人や、中国人も結構やるな、と思った
- ・ 2000年以上前にすでに数学があったということを知ったこと

このことから、その他の生徒(一部抜粋)についても同様のことがいえる。一方、“変容がみられなかった”という生徒も5名程いたが、ほとんどの生徒に変容が見られ、それが数学の是認へ結びつくきっかけになったと思われる。そして、歴史的背景の考察は生徒の動機付けとなった。また、生徒の中には、“難しくてわ

からない”という生徒も見られたが、大部分の生徒は、数学史を初めて学習したことによる新鮮さと同時に、追体験そのものも印象的であったようである。原典を追体験したことによる感想からもそういう意見が多数見られた。これらは、課題1・課題2に対する結果と考えられる。

以上より、数学史を学習したことにより生徒達は各自でその当時の数学を探求し、今まで捉えていた数学に対する認識を確認し、再構成を行ったといえる。さらに、以上の結果の考察を強化するものとして事前と事後に同じアンケート項目「数学はどんな学問だと思いますか？」の結果を取り上げる。

< 事前アンケート >	< 事後アンケート >
<ul style="list-style-type: none"> ● 趣味の世界 ● 公式が多すぎる ● ただ数字・記号がならんでいるだけの難しいやつ ● 抽象的 ● 文系の人には必要ない ● お金の計算ぐらいができればよい ● がんばってもむりなもの ● 算数よりも難しく、日常生活に必要な ● 中学の内容ではよくわからない ● 日常生活に必要なのに、なぜやるしかないのか！！と思うもの ● 将来数学を使う人以外は必要の無い教科 など 	<ul style="list-style-type: none"> ● 昔の人の知恵の集まり ● いろんなことの積み重ねの学問 ● 昔からある学問 ● 昔のひとはすばらしい ● 何かを求めたり、良く知るために、式を作ったり、規則を作ったりする ● どんな学問にも共通する奥の深い学問 ● 土地の測量 ● 謎が多く、それを解く ● いろいろな解き方があって、おもしろい ● 土地の計算をしたり、物の値段を計算したりする、意外と身近な学問 ● 基礎的なものから発展させていく学問 ● 基本が大事 ● いろいろ考える学問 ● 発想が豊か ● むずかしいけど重要 など

4 . おわりに

生徒達は各自でその当時の数学を探求し、日常的視野と歴史的視野において解釈し、今まで捉えていた数学に対する認識を確認した。そして、数学を総合的に捉え数学のよさを認識することにより数学観の再構成を行ったようだ。そのことは、アンケートおよび感想、その他、授業の観察から考察できた。また、それによって、課題1・課題2に答えたものと考えられる。今回の研究では、その準備段階において、筆者自身も数学観が変わっていったように思う。これをきっかけにさらに数学に対する認識を深め、指導法を考える上での示唆を得たいと考える。

謝辞

研究授業の実施に際して、私立茗溪学園の島 一史先生、鈴木 誠先生をはじめ、数学科の諸先生方には、多大なる御協力をいただきました。お礼申し上げます。

註 1) 本研究は、科学研究費、基盤研究 B (2) 展開研究 (課題番号 10558032、研究代表者 磯田正美) の一貫として行われた。

註 2) 授業の詳細並びに資料等は次に掲示している。

<http://130.158.186.11/mathedu/forAll/project/2000/index>

参考文献

- 【 1 】吉田光由(1978)。「塵劫記」 岩波書店、 p18、 pp116 - 131
- 【 2 】竹内 均 (1989)。「現代語版 塵劫記」 同文書院、 pp64 - 84、 pp255 - 262
- 【 3 】佐藤健一 (2000)。「江戸のミリオンセラ - 塵劫記の魅力」 研成社
pp1 - 3、 pp27 - 28
- 【 4 】大矢真一訳 (1975)。「中国の科学」 中央公論社、 pp156 - 164
- 【 5 】「九章算術」(著者、年代不詳) 四部叢刊初編子部 pp1 - 7
- 【 6 】ジョージ・G・ジョーゼフ (1996)。「非ヨーロッパ起源の数学」
講談社、 p216
- 【 7 】<http://moon.ap.kyushu-u.ac.jp/math/history/kyuusho/setumei11.html>
- 【 8 】ポイヤー (1984)。「数学の歴史 2」 朝倉書店、 p76
- 【 9 】グレイゼル(1997)。「数学史」 大竹書店、 pp107 - 108
- 【 10 】ヒース (1998)。「ギリシャ数学史」 共立出版、 pp338 - 344
- 【 11 】「Greek Mathematics Works」 」、 pp470 - 476
- 【 12 】磯田正美・阿部裕 (1994)。「表情からみた学習指導による数学観育成に関する一考察」、日本数学教育学会誌 第 7 6 巻 第 1 1 号
- 【 13 】磯田正美・榊原ますみ (1999)。「学習指導過程における評価」、
生きる力をはぐくむ算数授業の創造講座 第 9 巻
- 【 14 】磯田正美 (2000)。「数学教育改革の推進とテクノロジーの実証に関する研究」、
筑波大学数学教育学研究室 ~ ミレニアム・プロジェクトに就いて ~